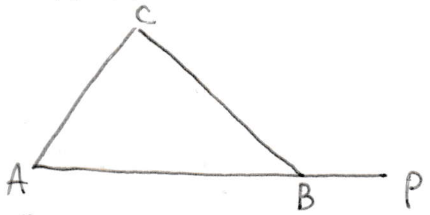
57 三角形 ABC の 3 辺の長さを a =BC, b =CA, c =AB とする。実数 $t \leqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に AP= tc となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2) 点 P が CP= a を満たすとき，t を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，∠A と ∠B に関する条件を求めよ。

(2010-1)



(1) 三角形 ABC において
余弦定理より

$$\cos\angle BAC = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

三角形 APC において．
余弦定理より．

$$CP^2 = b^2+(tc)^2-2tbc\cos\angle BAC.$$

$$= b^2+(tc)^2-2tbc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= ta^2+(1-t)b^2+t(1-t)c^2$$

//

(2) CP=a より．

$$a^2 = ta^2+(1-t)b^2+t(1-t)c^2$$

t について整理する．

$$ct^2-(b^2+c^2-a^2)t+(b^2-a^2)=0.$$

$$\{c^2t-(b^2-a^2)\}(t-1)=0.$$

したがって．$t=1,\ \dfrac{b^2-a^2}{c^2}$

$t \geqq 0$ なので

$$\begin{cases} t=1,\ \dfrac{b^2-a^2}{c^2} & (b \geqq a) \\ t=1 & (a<b) \end{cases}$$

//

(3)
(2) の条件をみたす点 P が 辺 AB 上にちょうど 2 つあるので，
$b \geqq a$ かつ $0 \leqq \dfrac{b^2-a^2}{c^2} < 1$

$0 \leqq \dfrac{b^2-a^2}{c^2} < 1$ より

$0 \leqq b^2-a^2 < c^2$ より．

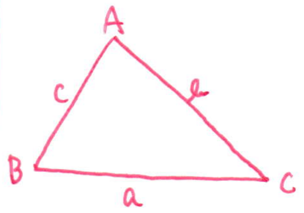
$\angle B \geqq \angle A$.

また．
$b^2 < c^2+a^2$ より
$\angle B$：鋭角．

したがって，∠A, ∠B に関する条件は，

$$0 < \angle A \leqq \angle B < \frac{\pi}{2}$$

//.



・余弦定理
$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\angle A$.
・内角と対辺の関係．
$a \geqq b \geqq c$
$\Leftrightarrow \angle A \geqq \angle B \leqq \angle C$.

58 座標平面上に 3 点 $O(0,\ 0)$, $A(2,\ 6)$, $B(3,\ 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

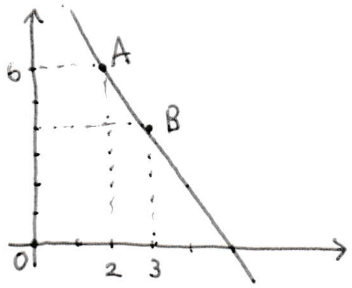
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を定め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) s を定数として，t を $t \leqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

(2009-1)



(1) 点Cの座標を (x, y) とおく。

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$AB \perp OC$ より，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ なので

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - 2y = 0$.

$x = 2y$.

また，点CはAB上にあるので，

$\overrightarrow{AB} = l\overrightarrow{AC}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} 2y-2 \\ y-6 \end{pmatrix}$.

$y = 2,\ l = \frac{1}{2}$

∴ 点C $(4, 2)$ //

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}$

$= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

$= s\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2s+3t-4 \\ 6s+4t-2 \end{pmatrix}$

よって $|\overrightarrow{CP}|^2 = (2s+3t-4)^2 + (6s+4t-2)^2$

$= 40s^2 + 60st + 25t^2 - 40s - 40t + 20$ //

(2) s：定数とする。

$|\overrightarrow{CP}|^2$ の式を t について整理する。

$|\overrightarrow{CP}|^2 = 25t^2 + (60s-40)t + 40s^2 - 40s + 20$

平方完成すると

$|\overrightarrow{CP}|^2 = 25\left(t^2 + \frac{4(3s-2)}{5}t\right) + 40s^2 - 40s + 20$.

$= 25\left(t - \frac{2(3s-2)}{5}\right)^2 + 4s^2 + 8s + 4$.

(i) 軸 $t = \frac{2(3s-2)}{5} \leq 0$ i.e. $s \leq \frac{2}{3}$ のとき。

最小値は $t = 0$ のときにとる。

その値は $|\overrightarrow{CP}|^2 = 40s^2 - 40s + 20$.

(ii) 軸 $t = \frac{2(3s-2)}{5} > 0$ i.e. $s > \frac{2}{3}$ のとき。

最小値は軸 $t = \frac{2(3s-2)}{5}$ でとる。

その値は $|\overrightarrow{CP}|^2 = 4s^2 + 8s + 4$.

(i),(ii)より $|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値は，

$$\begin{cases} 40s^2 - 40s + 20. & \left(s \leq \frac{2}{3}\right) \\ 4s^2 + 8s + 4 & \left(s > \frac{2}{3}\right). \end{cases}$$ //

ベクトル基本事項．

・$OA \perp OB \iff \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

・$A(x, y)$ のとき，$|\overrightarrow{OA}|^2 = x^2 + y^2$.

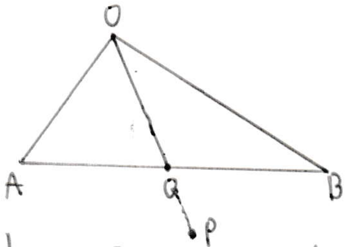
59 △OABにおいて，辺AB上に点Qをとり，直線OQ上に点Pをとる。ただし，点Pは点Qに関して点Oと反対側にあるとする。3つの三角形△OAP, △OBP, △ABPの面積をそれぞれa, b, cとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OQ}$を$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, a, b$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, a, b, c$を用いて表せ。

(3) 3辺OA, OB, ABの長さはそれぞれ3, 5, 6であるとする。点Pを中心とし，3直線OA, OB, ABに接する円が存在するとき，$\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ。

(2008-3)



(1) △OAP : △OBP = AQ : QB より.

AQ : QB = $a:b$.

よって. $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b}$ //

(2) △OAB : △ABP = OQ : QP より.

OQ : QP = $(a+b-c):c$

点Pは点Qに関して点Oと反対側にあるので

OQ : OP = OQ : (OQ + QP)

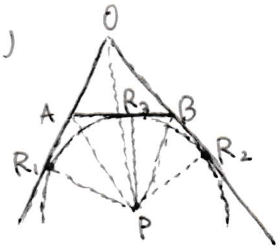
$= (a+b-c):(a+b)$.

$\therefore \overrightarrow{OP} = \dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{OQ}$

$= \dfrac{a+b}{a+b-c}\cdot\dfrac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b}$

$= \dfrac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b-c}$ //

(3)



点Pを中心とし、3直線OA, OB, ABに接する円と、この3直線との接点をR_1, R_2, R_3とする.

このとき,

$OA \perp PR_1$, $OB \perp PR_2$, $AB \perp PR_3$.

また. 円の半径をrとすると.

$PR_1 = PR_2 = PR_3 = r$.

$a = \dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot PR_1 = \dfrac{3}{2}\cdot r$

$b = \dfrac{1}{2}\cdot OB\cdot PR_2 = \dfrac{5}{2}r$

$c = \dfrac{1}{2}AB\cdot PR_3 = \dfrac{6}{2}\cdot r$

(2)の結果に代入.

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{\frac{5}{2}r\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}r\overrightarrow{OB}}{\frac{14}{2}r}$

$= \dfrac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{14}$ //.

(3) △OAP. △OBP. △ABPの底辺をそれぞれOA. OB. ABとすると.
高さは円の半径になること。

60 いくつかの半径3の円を，半径2の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

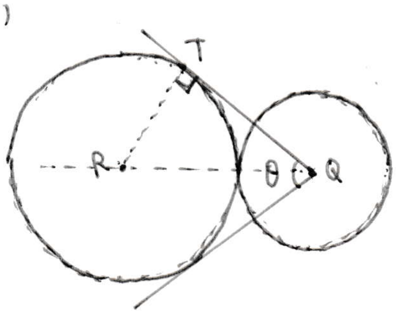
(1) 半径3の円の1つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する2本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，~~$0 \leqq \theta \leqq \pi$~~ $0<\theta<\pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径3の円の最大個数を求めよ。

(2008-5)

(1)



円Q，Rの中心をそれぞれQ，Rとおく。
また，2本の半直線のうち，片方の半直線とRの接点をTとおく。
すると，$\angle RQT = \dfrac{\theta}{2}$。

$RT=3,\ RQ=2+3=5$ より $TQ=4$。

よって $\sin\angle RQT = \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{3}{5}$

$\cos\angle RQT = \cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{4}{5}$

$$\sin\theta = \sin 2\cdot\frac{\theta}{2} = 2\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{24}{25}\ //$$

(2) $\triangle QRT$ において，

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{5} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$\sin\dfrac{\pi}{6} < \sin\dfrac{\theta}{2} < \sin\dfrac{\pi}{4}$ …①

$\triangle QRT$ は直角三角形で，$\dfrac{\theta}{2}$ はこの直角三角形の鋭角の1つなので

$0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ …②

①，②より，

$\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ ∴ $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ //

(3) (i) $\theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，

$4\theta < 2\pi$ なので，

半径3の円は少なくとも4つは配置できる。

(ii) $\dfrac{\pi}{3} < \theta$ より，

$2\pi < 6\theta$ より，

6つ配置すると交わる円が生じるため，

6つ配置は不可。

(iii) 5つ配置できるか否かを調べる。

5θ と 2π の大小関係を調べる。

$$5\theta - 2\pi = 2\left(\frac{5}{2}\theta - \pi\right)$$
$$= 2\left\{\left(\frac{5}{2}\theta - 2\theta\right) - (\pi - 2\theta)\right\}$$
$$= 2\left\{\frac{1}{2}\theta - (\pi - 2\theta)\right\}$$

よって $\dfrac{1}{2}\theta$ と $(\pi-2\theta)$ の大小関係を調べる。

$$\sin(\pi - 2\theta) = \sin(2\theta)$$
$$= 2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$
$$= 2\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{7}{25} = \frac{336}{25^2}$$

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{375}{5^4}$

よって $\sin\dfrac{\theta}{2} > \sin(\pi - 2\theta)$。

ここで，$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，

$0 < \pi - 2\theta < \dfrac{1}{3}\pi$ より。

θ，$\pi - 2\theta$ はともに鋭角。

∴ $\dfrac{\theta}{2} > \pi - 2\theta$。

$5\theta > 2\pi$。

よって，5つの円を配置することはできない。

∴最大個数は4つ。//

(3)−(iii)，式変形せずに解くこともできるが，
5倍角があり大変…。
他にもアイデアはあるので，何かしらのアイデアを使って
解くのが妥当？

61 △OAB において，辺 OB の中点 M，辺 AB を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし，$0<\alpha<1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ。

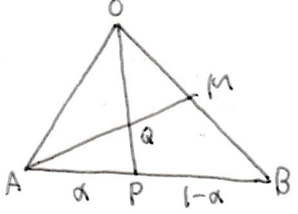
(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および α を用いて表せ。

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle AOB=\theta$ で $\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。

(2006-2)

(1)



$AP:PB=\alpha:(1-\alpha)$ より.

$\overrightarrow{OP}=(1-\alpha)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}$
$=(1-\alpha)\vec{a}+\alpha\vec{b}$ //

$AQ:QM=l:(1-l)$ とおく.

メネラウスの定理より.

$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QM}\cdot\frac{MO}{OB}=1.$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{l}{1-l}\cdot\frac{1}{2}=1.$$

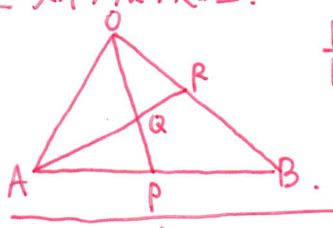
2の式から.

$$l=\frac{2\alpha}{1+\alpha},\quad 1-l=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

よって.

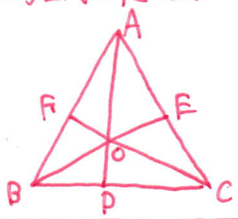
$$\overrightarrow{OQ}=(1-l)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OM}$$
$$=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a}+\frac{2\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}$$
$$=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b} \quad //$$

メネラウスの定理.



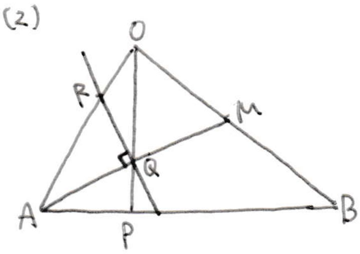
$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QR}\cdot\frac{RO}{OB}=1.$$

チェバの定理.



$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

(2)



仮定の AM⊥RQ を用いて内積0を利用したい。

$OR:RA=k:(1-k)$ とおく.

$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$ …(※)

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}$$
$$=k\vec{a}-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}\right).$$
$$=\left(k-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\vec{a}-\frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$$

$\overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{AM}$ より $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ なので

$$\left\{\left(k-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\vec{a}-\frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)=0.$$

展開すると.

$$\frac{1}{2}\left(k-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}|\vec{b}|^2-\left(k-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)|\vec{a}|^2+\frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

仮定から，$|\vec{a}|^2=4$，$|\vec{b}|^2=9$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=1$ を代入して整理すると.

$$k=\frac{1-2\alpha}{1+\alpha}.$$

(※)に代入.

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a} \quad //$$

(3) Rが OAの中点より.

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.$$

(2)の結論より. $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}$.

$$\therefore\ \alpha=\frac{1}{5} \quad //$$

$\boxed{62}$ 3次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフをGとする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 (X,Y) に対称な点の座標を求めよ。

(2) Gはこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線

$$mx+ny=0$$

に関する，点 (X,Y) に対称な点の座標を求めよ。ただし $m,\ n$ は共には0~~出~~でないとする。

(4) Gは原点を通るどんな直線に~~対しても~~関しても線対称でないことを示せ。

(2001-2)

(1) 点(p,q)に関して点(X,Y)と点対称な点を(X',Y')とする。

すると、$\frac{X+X'}{2}=p$, $\frac{Y+Y'}{2}=q$ より、

$$X'=2p-X,\quad Y'=2q-Y.$$

∴ 求める点の座標は $(2p-X,\ 2q-Y)$ //

(2) G上の点(p,q)に関して、G上の点(X,Y)と点対称な点を(X',Y')とする。

この点もG上にあるので、

$$Y'=X'^3+aX'^2+bX'+c.$$

(1)の結果より、

$$2q-Y=(2p-X)^3+a(2p-X)^2+b(2p-X)+c.$$

点(p,q)がG上の点より、

$$q=p^3+ap^2+bp+c.$$

まとめて、X,Yについて整理する。

$$Y=X^3-(6p+a)X^2+(12p^2+4ab+b)X-6p^3-2ap^2+c.$$

この式は、$Y=X^3-aX^2+bX+c$

と恒等的に等しい。

$$\therefore \begin{cases} -(6p+a)=a. & \cdots ① \\ 12p^2+4ab+b=b. \\ -6p^3-2ap^2+c=c \end{cases}$$

①より $p=-\frac{a}{3}$.

これは、2つ目, 3つ目の式をみたす。

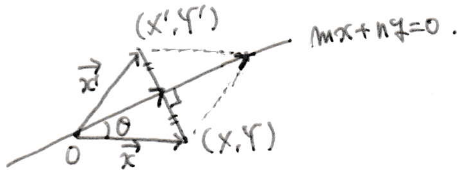
また、このとき $q=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$.

よって、Gは

点$\left(-\frac{a}{3},\ \frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\right)$

に関して点対称である。 //.

(3).



直線 $mx+ny=0$ の大きさ1の方向ベクトルを $\vec{e}$ とおく。

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}(n,\ -m).$$

また、直線 $mx+ny=0$ に関して点(X,Y)に対称な点を(X',Y')とする。

$\vec{x}=(X,Y)$, $\vec{x'}=(X',Y')$ とおく。

ここで、

$\vec{x}\cdot\vec{e}=|\vec{x}|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos\theta$　(θ: $\vec{x}$と$mx+ny=0$のなす角).

において、$|\vec{e}|=1$より、

$\vec{x}\cdot\vec{e}$はベクトル$\vec{x}$の直線 $mx+ny=0$ への正射影の大きさである。

これより、$2(\vec{x}\cdot\vec{e})\cdot\vec{e}$で $\vec{x}$と$\vec{x'}$で作るひし形の対角線の一つを表せる。

よって、

$\vec{x'}=2(\vec{x}\cdot\vec{e})\cdot\vec{e}-\vec{x}$ と表せる。

$$\therefore\ \vec{x'}=2(\vec{x}\cdot\vec{e})\vec{e}-\vec{x}$$

$$=\left(-\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}X-\frac{2mn}{m^2+n^2}Y,\ -\frac{2mn}{m^2+n^2}X+\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}Y\right).$$

よって、求める点の座標は、

$$\left(-\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}X-\frac{2mn}{m^2+n^2}Y,\ -\frac{2mn}{m^2+n^2}X+\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}Y\right)$$ //

(4) G上の点 (X, Y) に対して (3) にならって

$$P = -\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},\quad Q = -\frac{2mn}{m^2+n^2} \quad \cdots (**)$$

とおく。すると、

$$X' = PX + QY,\ Y' = QX - PY.$$

と表せる。

(X', Y') が G上にあるとする。

$$Y' = X'^3 + aX'^2 + bX' + c$$

$$QX - PY$$
$$= (PX+QY)^3 + a(PX+QY)^2 + b(PX+QY) + c. \cdots (*)$$

ここで、この式を整理した際に、
この式が $Y = X^3 + aX^2 + bX + c$ に一致
する為には、Y^3 の係数は0.

$\therefore Q^3 = 0$. より $Q = 0$.

このとき、$(*)$ は、

$$-PY = P^3X^3 + aP^2X^2 + bPX + c.$$

(i) $P \neq 0$ のとき

辺々 $-P$ で割る。

$$Y = -P^2X^3 - aPX^2 - bX - \frac{1}{P}c.$$

これが
$Y = X^3 + aX^2 + bX + c$ と一致
するので

$$-P^2 = 1.$$

これを満たす実数 P は存在しない。
つまり、$(**)$ をみたす m, n は存在しない。

(ii) $P = 0$ のとき、

$P = Q = 0$. より、$(**)$ から

$m^2 - n^2 = 0,\ 2mn = 0.$

$\therefore m = n = 0.$

これは m と n がともに0でないことに矛盾。

(i), (ii) から、条件をみたす $mx + ny = 0$ が存在しないので、
G は原点を通るどんな直線に関しても線対称ではない。 //.

63 tを$0 < t < 1$を満たす実数とする。面積が1である三角形ABCにおいて，辺AB，BC，CA，をそれぞれ$2:1$，$t:1-t$，$1:3$に内分する点をD, E, Fとする。また，AEとBF，BFとCD，CDとAEの交点をそれぞれP，Q，Rとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3直線AE, BF, CDが1点で交わるときのtの値t_0を求めよ。
以下，tは$0 < t < t_0$を満たすものとする。

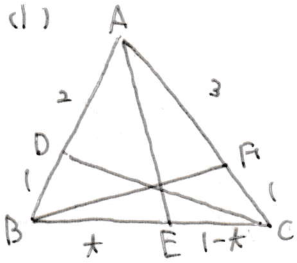
(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$, $\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$を満たす実数k, lをそれぞれ求めよ。

(3) 三角形BCQの面積を求めよ。

(4) 三角形PQRの面積を求めよ。

(2016-2)

(1)

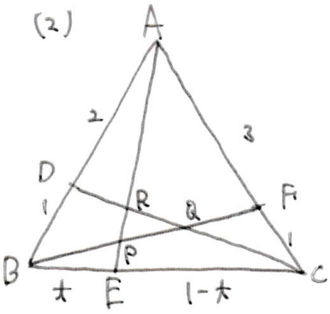


$\triangle ABC$において，
$AD:DB=2:1$,
$AF:FC=3:1$,
$BE:EC=t:(1-t)$
で $t=t_0$ のとき，
AE, BF, CDが1点で交わるので，
チェバの定理より，

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t_0}{t_0}\cdot\frac{3}{1}=1$.

$\therefore t_0=\frac{3}{5}$ //.

(2)



条件から，
$AP=kAE$, $CR=lCD$より，
$AP:PE=k:(1-k)$
$CR:RD=l:(1-l)$.

$\triangle ABC$と直線BFに
メネラウスの定理を用いて，

$\frac{AP}{PE}\cdot\frac{EB}{BC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$. から.

$\frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$.

よって $k=\frac{3}{3+t}$

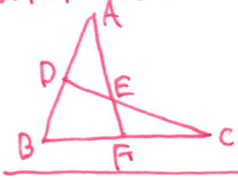
また，$\triangle CDB$と直線AEにメネラウスの定理．

$\frac{CR}{RD}\cdot\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BE}{EC}=1$. から．

$\frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$.

よって．$l=\frac{3(1-t)}{3-t}$

メネラウスの定理．



$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{CF}{BC}\cdot\frac{EA}{FE}=1$

(3). $BQ:QF=m:(1-m)$ とする．
$\triangle BFA$と直線CDにメネラウスの定理を用いて．

$\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{FC}{CA}\cdot\frac{AD}{DB}=1$. から．

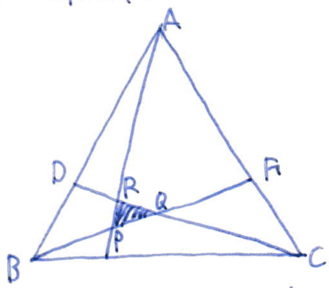
$\frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$.

よって． $m=\frac{2}{3}$

$\triangle ABC=4\cdot\triangle BCF$.
$\triangle BCF=\frac{3}{2}\triangle BCQ$.
$\triangle ABC$の面積は1なので，
$\triangle BCQ=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$ //.

(4)

方針．



$\triangle ABC$の面積：1から．
$\triangle ABP$, $\triangle BCQ$, $\triangle ACR$の面積を引く．
$\triangle BCQ$は(3)で求めたので残りを求める．
変数tが入り計算が大変であるが，落ちついて計算する．

(4) 〈解答〉.

(2) より.

$$AP:PE = \frac{3}{3+t} : \left(1 - \frac{3}{3+t}\right)$$

$$= \frac{3}{3+t} : \frac{t}{3+t}$$

$$= 3 : t.$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{t}\triangle ABE.$$

$$\triangle ABE = \frac{3+t}{3}\triangle ABP$$

$$\therefore \triangle ABP = \frac{3}{3+t}\cdot t\cdot \triangle ABC$$

$$= \frac{3t}{3+t}$$

次に、 $CR:RD = \frac{3(1-t)}{3-t} : \left(1 - \frac{3(1-t)}{3-t}\right)$

$$= 3(1-t) : 2t.$$

$$\triangle ABC = \frac{3}{2}\triangle CAD.$$

$$\triangle CAD = \frac{3(1-t)+2t}{3(1-t)}\triangle CAR.$$

$$\therefore \triangle CAR = \frac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}\cdot\frac{2}{3}\cdot\triangle ABC$$

$$= \frac{2(1-t)}{3-t}$$

$$\triangle PQR = \triangle ABC - (\triangle ABP + \triangle BCQ + \triangle ACR)$$

(3) の結論を用いて.

$$\triangle PQR = 1 - \left(\frac{3t}{3+t} + \frac{1}{6} + \frac{2(1-t)}{3-t}\right)$$

$$= \frac{25t^2 - 30t + 9}{6(3-t)(3+t)}$$

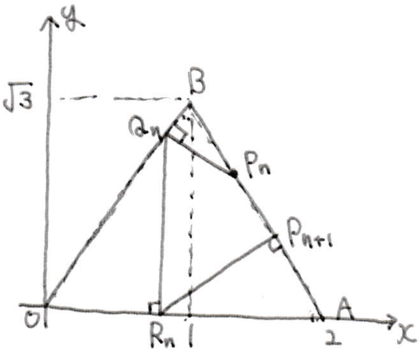
$$= \frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)} \quad //.$$

64 座標平面上の 3 点 O(0, 0), A(2, 0), B(1, $\sqrt{3}$) を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A, B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2, P_3, $\cdots$ を以下のように定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

(2019-4)



方針

AP_n と AP_{n+1} についての漸化式を立てて解く。

$AP_n = l_n$ とおくと

$$l_{n+1} = AP_{n+1}$$
$$= AR_n \cos 60° = \frac{1}{2} AR_n$$
$$= \frac{1}{2}(2 - OR_n)$$
$$= \frac{1}{2}(2 - OQ_n \cos 60°) = 1 - \frac{1}{4} OQ_n$$
$$= 1 - \frac{1}{4}(2 - BQ_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} BQ_n$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} BP_n \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} BP_n$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(2 - AP_n)$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} l_n$$

まとめると

$$l_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} l_n$$

式変形する。

$$\left(l_{n+1} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{8}\left(l_n - \frac{2}{3}\right)$$

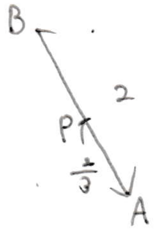
よって

$$l_n - \frac{2}{3} = \left(l_1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$
$$l_n = \left(l_1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

$0 < l_1 < 2$，$\left|-\frac{1}{8}\right| < 1$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \left(l_1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} = 0.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{2}{3}$$

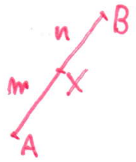


よって，P_n が限りなく近づく点は AB を $\frac{2}{3} : \left(2 - \frac{2}{3}\right) = 1 : 2$ に内分する点。

この座標は，

$$\left(\frac{2\cdot 2 + 1\cdot 1}{1+2}, \frac{2\cdot 0 + 1\cdot\sqrt{3}}{1+2}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) //$$

内分点



点 $A(a_1, a_2)$，点 $B(b_1, b_2)$

点 $X(x_1, x_2)$ とする。

線分 AB を $m : n$ に内分する点の座標は

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{n\cdot a_1 + m b_1}{m+n}, \frac{n a_2 + m b_2}{m+n}\right)$$

65 平面上に四角形 ABCD と，この四角形の外部に点 E がある。これらの点から得られるベクトルについて，関係式

$$2\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0},\ 8\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{EA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{EB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{EC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{ED}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ で表せ。

(2) 四角形 BCDE はどのような四角形か。

(3) 直線 EA と直線 BD の交点を F とするとき，EA と AF の長さの比を求めよ。

(4) 四角形 ABCD と四角形 BCDE の面積の比を求めよ。

(1992-1)

(1) $\begin{cases} 2\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} & \cdots ① \\ 8\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}) & \cdots ② \end{cases}$

①より．

$2\cdot(-\vec{a})+3(\vec{d}-\vec{a})+2(\vec{b}-\vec{a})=\vec{0}$

$7\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{d}=\vec{0}$ $\cdots ③$

②より

$8\cdot\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=3((\vec{c}-\vec{b})+(\vec{c}-\vec{d}))$

$7\vec{a}+4\vec{b}-6\vec{c}+3\vec{d}=\vec{0}$ $\cdots ④$

③ ④より．

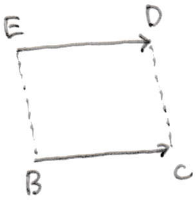
$\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$ //

(2) (1)の結果から．

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}$

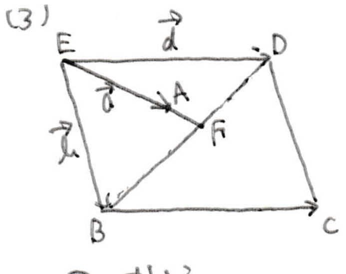
$\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}$

$\therefore\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$．



よって四角形 BCDE は
平行四辺形． //

(3)



③の式から．

$\vec{a}=\dfrac{2b+3d}{7}$

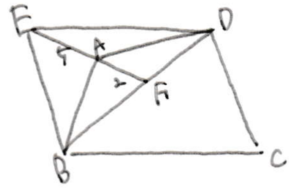
$=\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{2b+3d}{5}$

より．点Fは辺BDを3:2に内分している．

$\overrightarrow{EA}=\dfrac{5}{7}\cdot\overrightarrow{EF}$．

$\therefore$ EA:AF = 5:2 //．

(4)

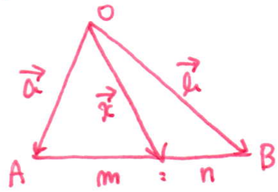


四角形EBCDの面積をS．
ABCDの面積をT．
とおく．

EA:AF = 5:2 より．
EF:AF = 7:2．
$\therefore$ △EBD:△ABD = 7:2
ここで，△BCD = △EBD．
であるので，S = △EBD + △BCD．
T = △ABD + △BCD．
より．

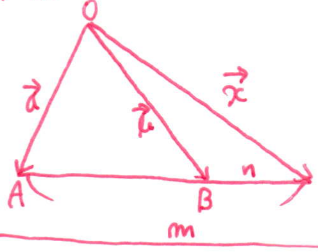
S:T = (7+7):(7+2)
= 14:9 //．

内分点



$\vec{x}=\dfrac{n\cdot\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

外分点



$\vec{x}=\dfrac{-n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{m-n}$