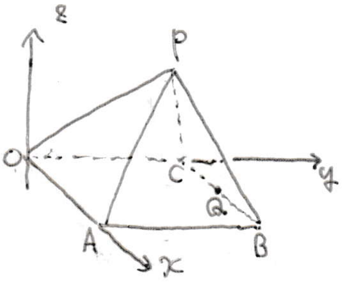
**66** 一辺の長さが1の正方形OABCを底面とし，点Pを頂点とする四角錐POABCがある。ただし，点Pは内積に関する条件 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}$，および $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}$ をみたす。辺APを $2:1$ に内分する点をMとし，辺CPの中点をNとする。さらに，点Pと直線BC上の点Qを通る直線PQは，平面OMNに垂直であるとする。このとき，長さの比BQ:QC，および線分OPの長さを求めよ。

(2013-2)




点O, A, B, Cの座標をそれぞれ
(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0) とする。
また、Pの座標を (x, y, z) とする。(z>0)
点Qは直線BC上より Qの座標を (t, 1, 0)
(t: 実数) と表せる。

・$\vec{OA}\cdot\vec{OP}=\frac{1}{4}$ より

$$x\cdot1+y\cdot0+z\cdot0=\frac{1}{4} \qquad \therefore\ x=\frac{1}{4}$$

・$\vec{OC}\cdot\vec{OP}=\frac{1}{2}$ より

$$x\cdot0+y\cdot1+z\cdot0=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}$$

以上から、点Pの座標は $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, z\right)$ で表せる。

・点Mは辺APを2:1に内分する点なので


$$\vec{OM}=\frac{1\cdot\vec{OA}+2\cdot\vec{OP}}{2+1}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+2\vec{OP})$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\\z\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}, 1, 2z\right).$$

・点Nは辺CPの中点なので


$$\vec{ON}=\frac{\vec{OC}+\vec{OP}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\\z\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, z\right)$$

直線PQ⊥平面OMNより
$\vec{PQ}\perp\vec{OM}$, $\vec{PQ}\perp\vec{ON}$.
$\therefore\ \vec{PQ}\cdot\vec{OM}=0$, $\vec{PQ}\cdot\vec{ON}=0$.

ここで、$\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}$

$$=\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\z\end{pmatrix}=\left(t-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -z\right).$$

・$\vec{PQ}\cdot\vec{OM}=0$ より

$$\left(t-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot1+(-z)\cdot2z=0.$$

$$2z^2-\frac{3}{2}t-\frac{1}{8}=0. \qquad \cdots①$$

・$\vec{PQ}\cdot\vec{ON}=0$ より

$$\left(t-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+(-z)\cdot z=0$$

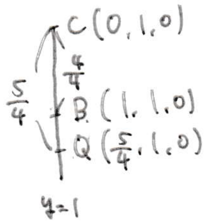
$$z^2-\frac{1}{4}t-\frac{11}{16}=0. \qquad \cdots②$$

①②より、$z>0$ から

$$t=\frac{5}{4}, \quad z=1.$$

よって点Qの座標は $\left(\frac{5}{4}, 1, 0\right)$ なので

BQ:QC = 1:5 //.




また、点Pの座標は $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$ より
線分OPの長さは

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{21}}{4} \ //.$$

$\vec{OA}\perp\vec{OB} \Rightarrow$ 内積 $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$!

**67** 空間内の４点

$$O(0,0,0),\ A(0,2,3),\ B(1,0,3),\ C(1,2,0)$$

を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ４点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2) ３点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3) 四角錐 ABCD の体積を求めよ。

(2011-4)

(1) 点Dの座標を$(x, y, z)$とおく.

点Dが 4点 O, A, B, C を通る球面の中心より

DO = DA = DB = DC が成立.

・DO = OA より.

$$x^2+y^2+z^2 = x^2+(y-2)^2+(z-3)^2$$

$$\therefore\ 4y+6z=13. \quad —①$$

・DO = DB より

$$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z-3)^2$$

$$\therefore\ 2x+6z=10.$$

$$x+3z=5. \quad —②$$

・DO = DC より

$$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2$$

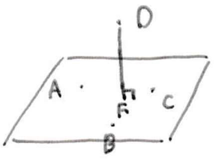
$$\therefore\ 2x+4y=5 \quad —③$$

①②③の式を連立方程式として解くと

$$x=\frac{1}{2},\ y=1,\ z=\frac{3}{2}.$$

よって点Dの座標は $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ //.

(2)




点Fは平面ABC上にあるので

$\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ と表せる

($\alpha, \beta$: 実数).

$$\therefore\ \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}$$

$$=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.$$

$$=\alpha\begin{pmatrix}1-0\\0-2\\3-3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1-0\\2-2\\0-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/2-0\\1-2\\3/2-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha+\beta-1/2\\-2\alpha+1\\-3\beta+3/2\end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{DF}\perp$平面ABCより.

$\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{AC}.$

$\therefore\ \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\ \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ が成立.

・$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より.

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta-1/2\\-2\alpha+1\\-3\beta+3/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=0$$

$$(\alpha+\beta-1/2)-2(-2\alpha+1)=0$$

$$5\alpha+\beta-\frac{5}{2}=0 \quad \cdots ④$$

・$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta-1/2\\-2\alpha+1\\-3\beta+3/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=0$$

$$(\alpha+\beta-1/2)-3(-3\beta+3/2)=0$$

$$\alpha+10\beta-5=0 \quad \cdots ⑤$$

④⑤より

$$\alpha=\frac{20}{49},\ \beta=\frac{45}{98}$$

よって $\overrightarrow{DF}=\frac{20}{49}\overrightarrow{AB}+\frac{45}{98}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{20}{49}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+\frac{45}{98}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/2\\-1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

$$=\frac{3}{49}(6, 3, 2).$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{DF}|=\frac{3}{49}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\frac{3}{7}\ //.$$

(3)

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2(\sqrt{10})^2-1^2}$$

$$=\frac{7}{2}$$

∴ 求める体積Vは

$$V=\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ //.$$

**68** $a$, $b$ を正の数とし，空間内の３点 $A(a, -a, b)$, $B(-a, a, b)$, $C(a, a, -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を $\alpha$，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき以下の問いに答えよ。

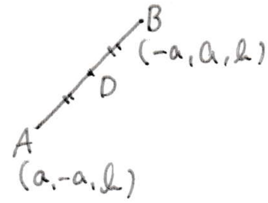
(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを示せ。また △ ABC の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{DC}$ と $\overrightarrow{DO}$ のなす角を $\theta$ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 $\alpha$ に垂直で原点 O を通る直線と平面 $\alpha$ との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 $\alpha$ 上にはないものとする。

(2007-3)

(1)




$A(a, -a, b)$, $B(-a, a, b)$ より

$\overrightarrow{AB} = (-2a, 2a, 0)$.

点Dが線分ABの中点より，座標は

$D\left(\frac{a-a}{2}, \frac{-a+a}{2}, \frac{b+b}{2}\right)$ となる.

$D(0, 0, b)$.

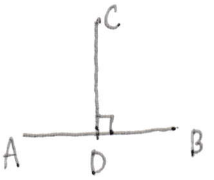
$\therefore \overrightarrow{DO} = (0, 0, -b)$

また，点 $C(a, a, -b)$ より

$\overrightarrow{DC} = (a, a, -2b)$.

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot (-2a) + a \cdot 2a + (-2b) \cdot 0$$
$$= -2a^2 + 2a^2 = 0$$
$$\therefore \overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \cdot (-2a) + 0 \cdot 2a + (-b) \cdot 0$$
$$= 0 \qquad \therefore \overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB} \quad //$$




$AB \perp CD$ から.

$$\triangle ABC = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \frac{1}{2}$$

ここで $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2a)^2 + (2a)^2 + 0^2}$

$= 2\sqrt{2}a \quad (\because a > 0)$

$|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DC}|$

$= \sqrt{a^2 + a^2 + (-2b)^2}$

$= \sqrt{2a^2 + 4b^2}$

よって

$$\triangle ABC = 2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}\sqrt{a^2 + 2b^2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 2a\sqrt{a^2 + 2b^2} \quad //.$$

垂直 ⇔ 内積 0

(2) (1)より，$\overrightarrow{DC} = (a, a, -2b)$.

$\overrightarrow{DO} = (0, 0, -b)$

なので，$|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{a^2 + a^2 + (-2b)^2}$

$= \sqrt{2(a^2 + 2b^2)}$

$|\overrightarrow{DO}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-b)^2} = \sqrt{b^2}$

$= b \quad (\because b > 0)$

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO} = |\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{DO}| \cdot \cos\theta$ より.

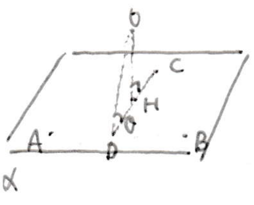
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO}}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{DO}|}$$

$$= \frac{a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-2b) \cdot (-b)}{b \cdot \sqrt{2(a^2 + 2b^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}.$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ から $\sin\theta \geq 0$，なので

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{2b^2}{a^2 + 2b^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 2b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} \quad (\because a > 0)$$
$$//.$$




点Hがα上の点であり

$\overrightarrow{OH} \perp \alpha$，$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DO}$ から. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DH}$

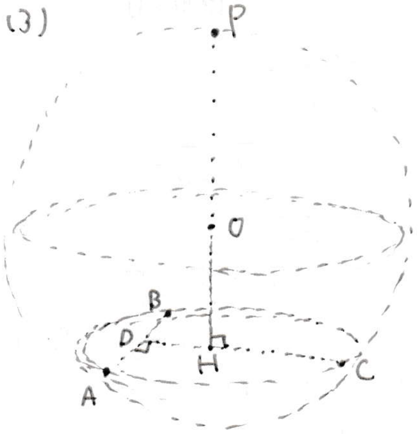
また. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ なので

点 H は線分 DC 上にある.

よって.

$$|\overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{OD}| \cdot \sin\theta.$$
$$= b \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} \quad //$$

(3)




四面体ABCPの体積が最大となるのは、
△ABCを底面とし、高さが最大となるときである。

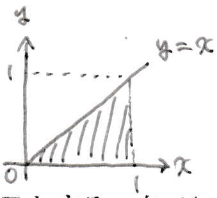
このときの点Pは、上図のように、
半直線HOが球面Sと交わる点になるときである。

$|\vec{OP}|$は球の半径より$|\vec{OA}|$と等しいので

$$
\begin{aligned}
HP &= HO + OP \\
&= HO + |\vec{OA}| \\
&= \frac{ah}{\sqrt{a^2+2h^2}} + \sqrt{2a^2+h^2}
\end{aligned}
$$

よって、求める体積Vは

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot HP \\
&= \frac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{a^2+2h^2}\cdot\left(\frac{ah}{\sqrt{a^2+2h^2}}+\sqrt{2a^2+h^2}\right) \\
&= \frac{2}{3}a\left\{ah+\sqrt{(a^2+2h^2)\cdot(2a^2+h^2)}\right\}
\end{aligned}
$$
//




**69** 座標空間内の三角柱

$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 1$

を考え，その $xy$ 平面内の面を S，$xz$ 平面内の面を $T$ とする。点 $A(a,\ b,\ 0)$ を $S$ 内に，点 $B(c,\ 0,\ d)$ を $T$ 内にとり，また $C(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直行する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2) ~~四角錐~~四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が $S$ 内を，点 B が $T$ 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置を全て求めよ。

(2004-4)

(1) $\vec{OA}$ と $\vec{OC}$ に直交するベクトルを $\vec{n}=(x,y,z)$ とする。(2) $\vec{e}$

・$\vec{OA}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{OA}\cdot\vec{n}=0$.

$a\cdot x+b\cdot y+0\cdot z=0$ より

$ax+by=0$ ….①

・$\vec{OC}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{OC}\cdot\vec{n}=0$ より

$x+y+z=0$ ….②

① において，$x=b$ とすると，$y=-a$.

② に代入．$z=a-b$.

よって，この連立方程式を満たす解の1つは，

$(x,y,z)=(b,-a,a-b)$.

なので，求める単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2a^2+2b^2-2ab}}(b,-a,a-b) \ //$$

次に，この単位ベクトルと $\vec{OB}$ の内積は

$$\vec{e}\cdot\vec{OB}=\frac{1}{\sqrt{2a^2+2b^2-2ab}}(bc+(-a)\cdot 0+(a-b)\cdot d)$$

であり，絶対値は

$$|\vec{e}\cdot\vec{OB}|=\frac{|bc+d(a-b)|}{\sqrt{2a^2+2b^2-2ab}}$$

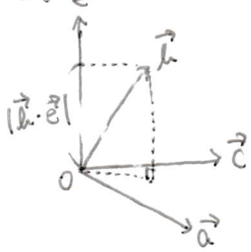
与えられた条件 $(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ x\geqq y,\ 0\leqq z\leqq 1)$ より，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$，$d\geqq 0$，$a\geqq b$ なので

$bc+d(a-b)\geqq 0$

よって，$|bc+d(a-b)|=bc+d(a-b)$.

となるので，求める内積の絶対値は

$$\frac{bc+d(a-b)}{\sqrt{2a^2+2b^2-2ab}} \ //$$




四面体 OABC の底面を $\triangle$OAC とすると，高さは $|\vec{e}\cdot\vec{b}|$ であらわされる．

$\triangle$OAC の面積を求める．

$$\triangle OAC=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{OA}|^2\cdot|\vec{OC}|^2-(\vec{OA}\cdot\vec{OC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(1^2+1^2+1^2)-(a+b)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-2ab}.$$

よって求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle OAC\cdot|\vec{e}\cdot\vec{b}|.$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(bc+d(a-b))$$

$$=\frac{1}{6}(bc+d(a-b)) \ //.$$

三角形の面積

$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ が成す三角形の面積は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{OA}|^2\cdot|\vec{OB}|^2-(\vec{OA}\cdot\vec{OB})^2}$$

(3) 与えられた条件から，

$0\leqq a,b,c,d\leqq 1$，$a\geqq b$ であるから，

(ア) $a-b>0$ かつ $b>0$ のとき，

$$\frac{bc+d(a-b)}{6}\leqq\frac{b+(a-b)}{6}\ (\text{等号成立は } c=d=1).$$

$$=\frac{a}{6}$$

$$\leqq\frac{1}{6}\quad(\text{等号成立は } a=1).$$

(イ) $b=0$ のとき，

$$\frac{bc+d(a-b)}{6}=\frac{ad}{6}\leqq\frac{1}{6}\ (\text{等号成立は } a=d=1)$$

(ウ) $a-b=0$ のとき，

$$\frac{bc+d(a-b)}{6}=\frac{bc}{6}\leqq\frac{1}{6}\ (\text{等号成立は } a=c=1)$$

(ア)〜(ウ)より．体積の最大値は $\frac{1}{6}$．
その時の点 A, B は．

$A(1, h, 0)$，$B(1, 0, 1)$ $(0 < h < 1)$
$A(1, 0, 0)$．$B(c, 0, 1)$ $(0 \leqq c \leqq 1)$
$A(1, 1, 0)$．$B(1, 0, d)$ $(0 \leqq d \leqq 1)$ //

場合分けについて．

$V = \dfrac{hc + d(a-h)}{6}$ の最大値問題．

- $c$ と $d$ は，他の文字に関与させることなく定めることができる．
- $h$ と $a-h$ は　$h$ が大 ⇒ $a-h$ は小 という関係ができる．

⇒ $h$ と $(a-h)$ に着目．

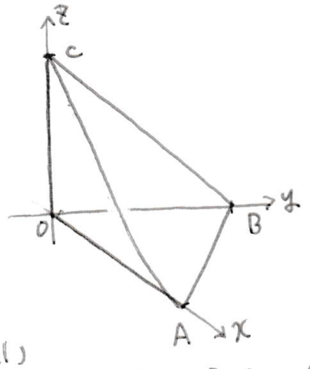
(ア) $h$ も $(a-h)$ も 0 でない．
(イ) $h$ が 0．
(ウ) $a-h$ が 0．
の 3通り．

**70** 空間内に四面体 OABC があり ∠AOB, ∠BOC, ∠COA は全て 90° であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ $a$, $b$, $c$ とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) ∠OGA, ∠OGB, ∠OGC が全て 90° であるための条件を $a$, $b$, $c$ の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を 1 : 2 に内分する点を点 D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

(2003-4)




(1)

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ であるので，

O を原点として

$\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0)$　$\overrightarrow{OB} = (0, b, 0)$，$\overrightarrow{OC} = (0, 0, c)$

とおくことができる．

$\angle OGA = \angle OGB = \angle OGC = 90^\circ$ であることと

$\overrightarrow{OG} \perp$ (平面 ABC) は同値．

この条件を表わすと，

$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ かつ $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$．

点 G が三角形 ABC の重点より

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}(a, b, c)$

また，$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$ より

$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(-a^2 + b^2) = 0$

$a^2 = b^2$

$a > 0, b > 0$ より　$a = b$．

同様に，$\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$ より

$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(-a^2 + c^2) = 0$

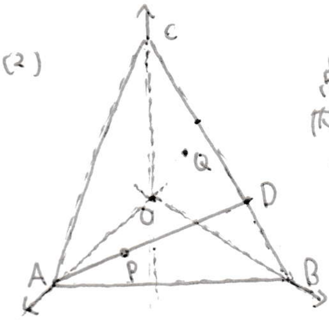
$a^2 = c^2$

$a > 0$，$c > 0$ より　$a = c$

∴ 求める条件は

$a = b = c$ //．

(2)




点 D は，線分 BC を 1 : 2 に内分するので

$\overrightarrow{OD} = \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

$= \frac{1}{3}(0, 2b, c)$．

点 P は，線分 AD 上を動くので

$AP : PD = t : (1-t)$ とおくと．

$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OD}$

$= ((1-t)a, 0, 0) + \frac{t}{3}(0, 2b, c)$

$= \left((1-t)a, \frac{2}{3}tb, \frac{t}{3}c\right)$　　$(t \neq 0)$

点 Q は，$\triangle APQ$ の重心が G に重なるように動くので，

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$．

よって

$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$

$\Leftrightarrow$　$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

$\Rightarrow$　$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (1-t)a \\ \frac{2}{3}t\,b \\ \frac{t}{3}\,c \end{pmatrix}$

$= \left((1-t)a, \left(1-\frac{2}{3}t\right)b, \left(1-\frac{1}{3}t\right)c\right)$

$|\overrightarrow{OQ}|^2 = (1-t)^2 a^2 + \left(1-\frac{2}{3}t\right)^2 b^2 + \left(1-\frac{1}{3}t\right)^2 c^2$

$= \left(a^2 + \frac{4b^2}{9} + \frac{c^2}{9}\right)t^2 - \left(2a^2 + \frac{4b^2}{3} + \frac{2c^2}{3}\right)t + (a^2 + b^2 + c^2)$

$= \frac{1}{9}(9a^2 + 4b^2 + c^2)t^2 - \frac{2}{3}(3a^2 + 2b^2 + c^2)t + (a^2 + b^2 + c^2)$

$= \frac{1}{9}(9a^2 + 4b^2 + c^2)\left\{t - \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2}\right\}^2$

$+ \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + 4c^2a^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}$

であるので，

線分 OQ の長さの最小値は，

$t = \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2}$ のとき

$\sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + 4c^2a^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}$ //

垂直 ⇔ 内積 0



条件に沿って計算するだけ…

**71** 空間内の図形について以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の面積は

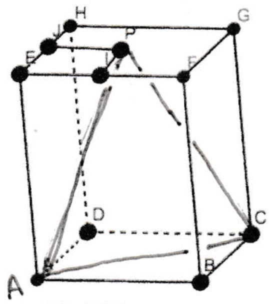
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係の式を用いて良い。

(2) 下の図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|=2$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{EAB}=\theta$ とする。ここで $\theta$ は $0<\theta<\pi$ なる定数とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI をおろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=\left|\overrightarrow{\mathrm{EI}}\right|$, $y=\left|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}\right|$ とするとき，$\triangle\mathrm{ACP}$ の面積を $\theta$, $x$, $y$ を用いて表せ。

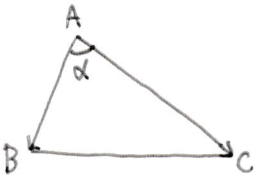
(3) 問 (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき，$\triangle\mathrm{ACP}$ の面積の最小値を求めよ。

(2002-4)



(平行六面体ABCD-EFGH)

(1) 三角形の面積公式を証明する問題.




$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を $\alpha$ とする.

△ABC の面積 $S$ は

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\alpha$ . …①

ここで, $\cos\alpha$ と内積の関係式

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$$

から, $0<\alpha<\pi$ において, $\sin\alpha>0$ より.

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2}} \quad \cdots ②$$

①②より.

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} \quad //$$

(2) 六面体 ABCD-EFGH は平行六面体なので,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{BC}$ . …③

また, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$ . より $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ .

このとき, ③より.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ .

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{EF}+y\overrightarrow{EH}$

$=\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$ .

仮定より.

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$ .

より

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ .

また.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$ .

$=2\cos\theta$ .

よって,

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2$

$=1+0+1=2$ .

$|\overrightarrow{AP}|^2=|\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}|^2$

$=|\overrightarrow{AE}|^2+x^2|\overrightarrow{AB}|^2+y^2|\overrightarrow{AD}|^2$

$+2(x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+xy\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})$ .

$=4+x^2+y^2+4x\cos\theta$ .

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD})$ .

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+y|\overrightarrow{AD}|^2$

$=2\cos\theta+x\cdot1+y\cdot0+0+x\cdot0+y\cdot1$

$=x+y+2\cos\theta$

(1)より.

$$\triangle ACP=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2\cdot|\overrightarrow{AP}|^2-(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2+4x\cos\theta+4)-(x+y+2\cos\theta)^2}$$

続.

ここで、

$$2(x^2+y^2+4x\cos\theta+4)-(x+y+2\cos\theta)^2$$

$$=(2x^2+2y^2+8x\cos\theta+8)-(x^2+y^2+4\cos^2\theta$$
$$+2xy+4x\cos\theta+4y\cos\theta)$$

$$=x^2+y^2-2xy+4x\cos\theta-4y\cos\theta+8-4\cos^2\theta$$
$$=(x-y)^2+4(x-y)\cos\theta+4(2-\cos^2\theta)$$

よって求める面積は

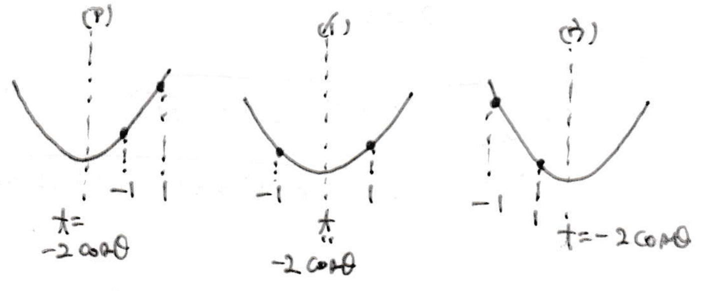
$$\triangle ACP=\frac{1}{2}\sqrt{(x-y)^2+4(x-y)\cos\theta+4(2-\cos^2\theta)}$$ //

(3) $t=x-y$ とおく。$0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ で、$x$ と $y$ は各々独立に動くので $-1\leq t\leq 1$.

$$f(t)=t^2+4t\cos\theta+4(2-\cos^2\theta)$$

とおくと、$\triangle ACP$ の面積の最小値は、$f(t)$ が最小値をとるときである。

$f(t)$ の最小値を調べる。




(ア) $-2\cos\theta<-1$ のとき、i.e. $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ のとき。

最小値は $t=-1$ のとき、

$$f(-1)=1-4\cos\theta+4(2-\cos^2\theta)$$
$$=9-4\cos\theta-4\cos^2\theta.$$

(イ) $-1\leq-2\cos\theta\leq 1$ のとき i.e. $\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{2}{3}\pi$ のとき。

最小値は $t=-2\cos\theta$ のとき。

$$f(-2\cos\theta)=8\sin^2\theta.$$

(ウ) $1<-2\cos\theta$ のとき i.e. $\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$ のとき。

最小値は $t=1$ のとき。

$$f(1)=9+4\cos\theta-4\cos^2\theta.$$

よって $\triangle ACP$ の最小値は

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{9-4\cos\theta-4\cos^2\theta} & \left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)\\ \frac{1}{2}\sqrt{8\sin^2\theta}=\sqrt{2}\sin\theta & \left(\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{2}{3}\pi\right)\\ \frac{1}{2}\sqrt{9+4\cos\theta-4\cos^2\theta} & \left(\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi\right)\end{cases}$$ //

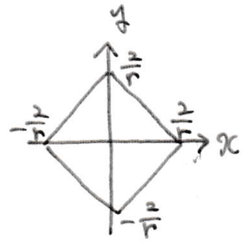
**72** 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は $x$ 軸で，中心軸に直行する平面による切り口は半径 $r$ の円である。正四角柱の中心軸は $z$ 軸で，$xy$ 平面による切り口は一辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は $x$ 軸と $y$ 軸である。$0 < r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角中の共通部分を $K$ とする。

(1) 高さが $z = t\ (-r \leqq t \leqq r)$ で $xy$ 平面に平行な平面と $K$ との交わりの面積を求めよ。

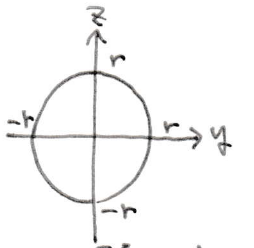
(2) $K$ の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

(2001-3)



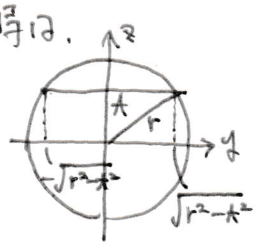
$x$-$y$ 平面による切り口.



$y$-$z$ 平面による切り口

(1) 正四角柱を平面 $z=t$ で切断した時，断面図は $t$ の値に関わらず，左上図のようになる．

円柱を平面 $z=t$ で切断した時は，右図より．



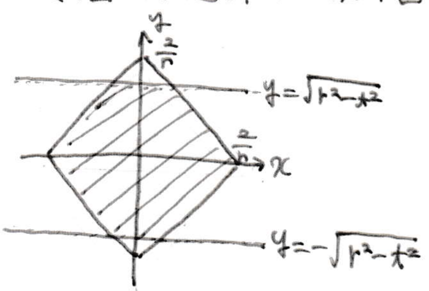
$-\sqrt{r^2-t^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-t^2}$

をみたす $x$ 軸に平行な帯状の図形になる．

$0 < r \leq \sqrt{2}$ より．

$\sqrt{r^2-t^2} \leq r \leq \frac{2}{r}$

よって，2つの立体を平面 $z=t$ で切断したときの断面の共通部分は，左下図の斜線部．



この面積 $S$ は，

$$S = \left(\frac{2\sqrt{2}}{r}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}-\sqrt{r^2-t^2}\right)^2$$

$$= \frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2} - 2r^2 + 2t^2$$

共通部分を立体で見るのではなく，断面図で調べていくことが大切．

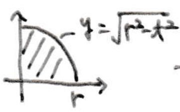
(2) 求める体積 $V(r)$ は

$$V(r) = \int_{-r}^{r}\left(\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2} - 2r^2 + 2t^2\right)dt.$$

図形の対称性から．

$$V(r) = 2\cdot\int_{0}^{r}\left(\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2} - 2r^2 + 2t^2\right)dt$$

$$= \frac{16}{r}\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt - 4r^2\int_0^r dt + 4\int_0^r t^2\,dt$$

$= \frac{16}{r}\cdot$  $- 4r^2\cdot r + 4\cdot\frac{1}{3}r^3$

$$= \frac{16}{r}\cdot\frac{\pi r^2}{4} - 4r^3 + \frac{4}{3}r^3$$

$$= 4\pi r - \frac{8}{3}r^3 \quad //.$$

(3)

$$V'(r) = 4\pi - 8r^2$$

$V'(r) = 0$ とおくと．$r = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$．

よって．$0 < r \leq \sqrt{2}$ における増減表は．

| $r$ | 0 | $\cdots$ | $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(r)$ | / | + | 0 | − | / |
| $V(r)$ | / | ↗ | | ↘ | |

上の増減表より．$r = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ で最大値をとり．

その値は $V(\sqrt{\pi/2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\sqrt{\pi}$ //．

体積を求める問題だが，立体図を描かずに解いていく方が混乱せずに済む問題．
断面図を描いていけばイメージはつかめるので無理して3次元の図を描く必要はない．

**73** $a$, $b$, $c$ を 0 でない実数として，空間内に 3 点 A($a$, 0, 0), B(0, $b$, 0), C(0, 0, $c$) をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2) (1) における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3) (1) における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。

(2000-4)

(1) $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP})=0$. において.

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}$ とおくと.

$\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

$\therefore\ \overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP})=0$.

$\overrightarrow{AP}\cdot(3\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})=0$.

$3\cdot|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})=0$.

$|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}=0$.

$$\left(\overrightarrow{AP}-\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{6}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AP}-\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{6}\right)-\frac{1}{36}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})=0.$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{AP}-\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{6}\right|^2=\left|\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{6}\right|^2$$

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{6}$ とおくと.

$|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}|^2=|\overrightarrow{AQ}|^2$

$|\overrightarrow{QP}|^2=|\overrightarrow{AQ}|^2$

よって. 点Pは. 中心を点Qとする Aを通る球面上の点.

ゆえに. 点Pは. 定点Qから一定の距離にある. //

(2) (1)より

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

∴点Qは 平面ABC上にある.

もちろん. 座標を使って解くのがまず思いつく手法.
もし座標が与えられていない場合は 上記の解法で
解くことになる。どちらでも解けるようにしておくとよい.

(3) $\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$.

$\overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-(a^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$$

四面体ABCPは. 底面を △ABCとするとき.
高さは Pから 平面ABCに下ろした垂線PH
の大きさである.

(1)より. 点Pは点Qを中心とする球面上にある.

半径は. $|\overrightarrow{QP}|=|\overrightarrow{AQ}|$

$=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{6}\right|$

$=\dfrac{1}{6}\sqrt{9a^2+b^2+4c^2}$.

(2)より. 点Qは平面ABC上にある.

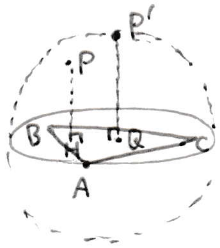
∴ PQ⊥(平面ABC) のときのPをP′とすれば.

四面体ABCPを最大にする

PHは P′H=P′Q である.

P′Qは まさに. 球の半径に等しいので

求める四面体の体積は




$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot P'Q$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{9a^2+b^2+4c^2}$$

$$=\frac{1}{36}\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(9a^2+b^2+4c^2)}$$ //

(3)で結局座標を用いるので
(1)から座標で解くのが一貫性がある.
まあ. 好きな方で… 笑

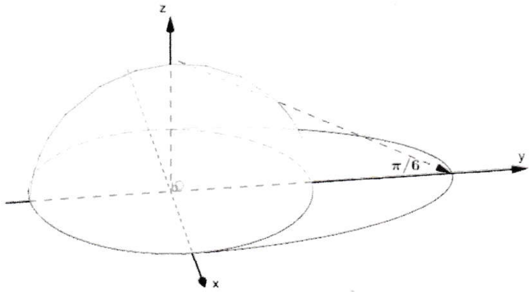
$\boxed{74}$ 座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように，$y$ 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が $xy$ 平面上に作る影を考える。$k$ を $-1<k<1$ を満たす実数とするとき，$xy$ 平面上の直線 $x=k$ において，球の外で光が当たらない部分の $y$ 座標の範囲を $k$ を用いて表せ。

(2) $xy$ 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

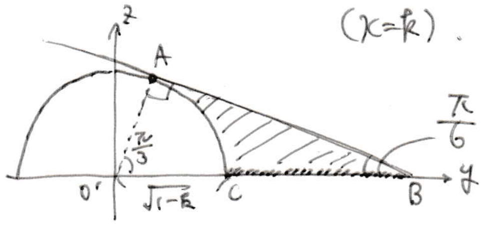
(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。

(2015-3)




(1) $xy$平面上の直線 $x=k$ $(-1<k<1)$ を通り，
$yz$平面に平行な面で切断した断面図を考える。

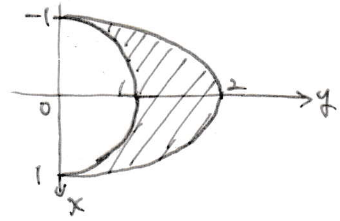
$(x=k)$




この平面上での円の半径は $\sqrt{1-k^2}$ である。
上の図の △ABO' は $\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形
ゆえに，$O'B=2\sqrt{1-k^2}$
影となる部分は線分 CB 上である。
∴ 求める $y$ の範囲は，

$$\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq 2\sqrt{1-k^2}$$ //

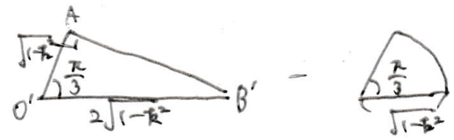
(2)




求める面積は右図の斜線部である。

$$S=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2$$
$$=\frac{\pi}{2}$$ //

(3)
(1)と同様の断面図で，斜線部の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)=$ 


$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-k^2}\cdot\sqrt{1-k^2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\pi\cdot\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(1-k^2).$$

よって，求める体積は

$$V=\int_{-1}^{1} S(k)\,dk$$
$$=2\cdot\int_0^1 S(k)\,dk. \quad (\because 対称性より).$$
$$=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\int_0^1(1-k^2)\,dk.$$
$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[k-\frac{1}{3}k^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\ V=\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi$$ //

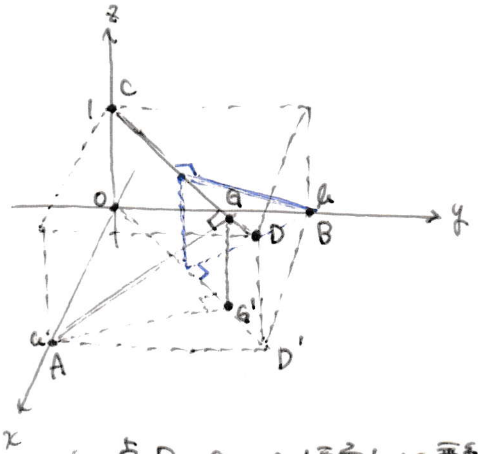
各小問全て絵を描けるか否かが解けるかどうかの分かれ目。
必要な部分の絵を切り抜いて描くことが大切!!

**75** 2つの定数 $a>0$ および $b>0$ に対し，座標空間内の4点を $A(a,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ b,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$, $D(a,\ b,\ 1)$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A から線分 CD に下ろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を $a$, $b$ を用いて表せ。

(2) さらに，点 B から線分 CD に下ろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ がなす角を $\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を $a$, $b$ を用いて表せ。

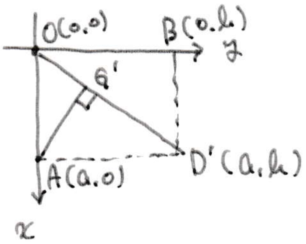
(2017-2)




(1) 点D, Gのxy平面上への垂線の足をD', G'とする。

AG⊥CD より、AG'⊥OD'

xy平面上で考える。




点G'が線分OD'上にあるので、$0\leqq t\leqq 1$ を用いて

$\overrightarrow{OG'}=t\overrightarrow{OD'}$

$=t(a,b)$ と書ける。

$\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{OG'}-\overrightarrow{OA}$

$=t(a,b)-(a,0)$

$=((t-1)a,\ tb)$.

AG'⊥OD' より、$\overrightarrow{AG'}\cdot\overrightarrow{OD'}=0$.

$\therefore\ ((t-1)a,\ tb)\cdot(a,b)=0$

$\Leftrightarrow\ (t-1)a^2+tb^2=0$

$\Leftrightarrow\ t=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

$\therefore$ G'の座標は $\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$.

G'はGのxy平面上への垂線の足であり、Gのz座標は1なので

Gの座標は $\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$ //

(2) まず、(1)と同様にしてHの座標を求める。

H'を点Hをxy平面上への垂線への足とし、

$\overrightarrow{OH'}=\lambda\overrightarrow{OD}$ $(0\leqq\lambda\leqq 1)$

$=\lambda(a,b)$ とおく。

$\overrightarrow{BH'}=\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OB}$

$=\lambda(a,b)-(0,b)$

$=(\lambda a,\ (\lambda-1)b)$

BH'⊥OD' より、$\overrightarrow{BH'}\cdot\overrightarrow{OD'}=0$.

$\therefore\ (\lambda a,\ (\lambda-1)b)\cdot(a,b)=0$

$\Leftrightarrow\ \lambda a^2+(\lambda-1)b^2=0$

$\Leftrightarrow\ \lambda=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore$ Hの座標は $\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)$.

内積の定義より、

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}=|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|\cdot\cos\theta$.

ここで、

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}=\lambda(t-1)a^2+t(\lambda-1)b^2+1$.

$=(a^2+b^2)\lambda t-\lambda a^2-tb^2+1$.

$=\dfrac{1}{a^2+b^2}(a^2b^2-2a^2b^2+a^2+b^2)$

$=\dfrac{1}{a^2+b^2}(a^2+b^2-a^2b^2)$

$|\overrightarrow{AG}|^2=a^2(t-1)^2+t^2b^2+1$.

$=(a^2+b^2)t^2-2a^2t+1+a^2$

$=\dfrac{-a^4}{a^2+b^2}+1+a^2=\dfrac{a^2+b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$

$|\overrightarrow{BH}|^2=\lambda^2a^2+(\lambda-1)^2b^2+1$.

$=(a^2+b^2)\lambda^2-2b^2\lambda+1+b^2$

$=\dfrac{-b^4}{a^2+b^2}+1+b^2=\dfrac{a^2+b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|}=\dfrac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}$ //

計算が多いのでミスのないように
計算の工夫をすることが大切!!

**76** 座標空間において，$xy$ 平面上にある双曲線 $x^2-y^2=1$ のうち $x \geqq 1$ を満たす部分を $C$ とする。また，$z$ 軸上の点 A(0, 0, 1) を考える。点 P が $C$ 上を動くとき，直線 AP と平面 $x=d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，$d$ は正の定数とする。

(2018-1)

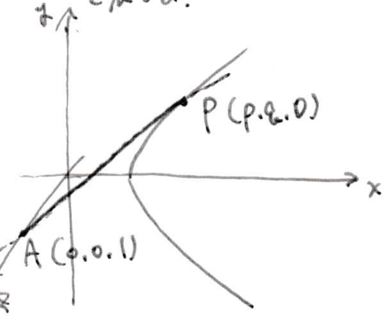
点Pの座標を $(p, q, 0)$ とする.

C上を動くので $p^2-q^2=1$ をみたす. ($p \geqq 1$) …※)

直線APの方程式は 実数$t$を用いて.

$$(x, y, z) = t(p, q, -1) + (0, 0, 1)$$
$$= (tp, tq, 1-t) \cdots ①$$

と表せる.




直線APと平面 $x=d$ …② との交点は. ($d>0$)

①②より

$$d = tp.$$
$$\therefore t = \frac{d}{p}$$

よって $y = \frac{dq}{p}$, $z = 1-\frac{d}{p}$ …③

③より

$$p = \frac{d}{1-z} \cdots ④$$

③④より

$$y = (1-z)q \qquad \therefore q = \frac{y}{1-z} \cdots ⑤$$

④⑤を※)に代入.

$$\left(\frac{d}{1-z}\right)^2 - \left(\frac{y}{1-z}\right)^2 = 1. \quad \left(\frac{d}{1-z} \geqq 1\right)$$

$$d^2 - y^2 = (1-z)^2$$
$$\therefore y^2 + (1-z)^2 = d^2$$

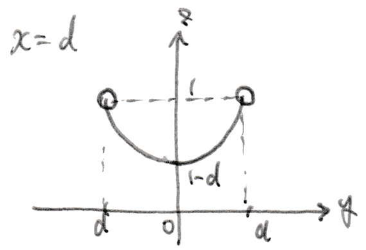
また, $1-z>0$ なので. $d \geqq 1-z$.

$$\therefore 1-d \leqq z < 1.$$

よって. 直線APと平面$x=d$との交点の軌跡は.

$y^2+(1-z)^2=d^2$ で. $1-d \leqq z < 1$

をみたす部分であり, 下図の実線部.



**77** 大きさ1の空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2},\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

を満たすように与えられているとする。また，空間ベクトル $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{d}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

を満たすとき，点 D($\vec{d}$), E($\vec{e}$), F($\vec{f}$) および原点 O について次の問いに答えよ。

(1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ となるような実数 $x$, $y$, $z$ を求めよ。同様に $\vec{f}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) ベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{d}-\vec{f}$ の大きさを求めよ。

(3) 三角形 ODF の面積を求めよ。

(4) 四面体 ODEF の体積を求めよ。

(1999-8)

(1) $\vec{a}\cdot\vec{d}=x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=x-\frac{1}{2}y=1.$ …①

$\vec{b}\cdot\vec{d}=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2+z\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=-\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z=0$ …②

$\vec{c}\cdot\vec{d}=x\vec{a}\cdot\vec{c}+y\vec{b}\cdot\vec{c}+z|\vec{c}|^2$

$=-\frac{1}{2}y+z=0$ …③

①②③を連立して解くと

$(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$

同様に

$\vec{f}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ とおくと.

$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right).$

$\therefore\ \vec{f}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$

(2) $\vec{d}=\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$|\vec{d}|^2=\frac{9}{4}\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{c}$

$+2\left(\frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$

$=\frac{9}{4}+1+\frac{1}{4}+2\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{3}{2}$

$\therefore\ |\vec{d}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\vec{f}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$

$|\vec{f}|^2=\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\frac{9}{4}\vec{c}\cdot\vec{c}$

$+2\left(\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}\right).$

$=\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}+2\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)$

$=\frac{3}{2}$

$|\vec{f}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

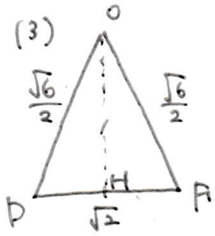
$\vec{d}-\vec{f}=\vec{a}-\vec{c}$

$|\vec{d}-\vec{f}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}$

$=2$

$|\vec{d}-\vec{f}|=\sqrt{2}$

(3)




(2)より △ODFは左図のような二等辺三角形.
OからDHに下ろした垂線の足をHとする.

$OH^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=1.$

$\therefore\ OH=1.$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\vec{OH}=\frac{1}{2}(\vec{OD}+\vec{OF})$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$

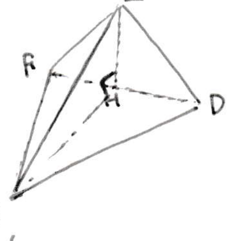
(1)と同様に. $\vec{e}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}.$

$\therefore\ \vec{e}=\vec{OH}+\vec{b}.$

$\therefore\ \vec{HE}=\vec{b}.$

また. $\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{f}=0$ より

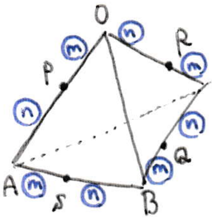
$\vec{b}\perp\vec{d}.\ \vec{b}\perp\vec{f}.$ であり $|\vec{HE}|=1.$




$\therefore\ V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot1$

$=\frac{\sqrt{2}}{6}$

$\boxed{78}$ 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。(ただし，$m,\ n>0$ とする。)




(1) (i) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。 ← $\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を調べる

(ii) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{RS}$ が垂直かどうか調べよ。

(2) (i) 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるときの $m$, $n$ の関係を求めよ。 ← $m=n$のとき P.Q.R.Sが同一平面上にあることを示せ.

(ii) このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(iii) G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。

(1998-7)

(1) (i)

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}$$
$$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$
$$=-\frac{m}{m+n}\vec{a}+\frac{n}{m+n}\vec{b}+\frac{m}{m+n}\vec{c} \quad /\!/$$

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BS}$$
$$=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+\frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$
$$=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}-\frac{n}{m+n}\vec{c} \quad /\!/$$

(ii) △OAB は正三角形より，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角は60°.

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad /\!/$$

(iii) $\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{RS}$の内積を調べる.

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=\frac{-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}\cdot\frac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$$
$$=\left(\frac{1}{m+n}\right)^2\left\{-mn|\vec{a}|^2+mn|\vec{b}|^2-mn|\vec{c}|^2+(n^2-m^2)\vec{a}\cdot\vec{b}+(m^2-n^2)\vec{b}\cdot\vec{c}+2mn\,\vec{a}\cdot\vec{c}\right\}$$

ここで，$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=1$.
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ を用いると，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=0.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{RS} \quad ■$$

(2) (i) 4点 P, Q, R, S が同一平面上に存在するとき，$\overrightarrow{RS}$は，実数$s$, $t$を用いて，
$\overrightarrow{RS}=s\overrightarrow{RP}+t\overrightarrow{RQ}$ と書ける.

ここで，
$$\overrightarrow{RP}=\frac{-n}{m+n}\vec{c}+\frac{m}{m+n}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{RQ}=\frac{m}{m+n}\vec{c}+\frac{n}{m+n}(\vec{b}-\vec{c})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{RS}=s\left(\frac{-n\vec{c}+m\vec{a}}{m+n}\right)+t\left(\frac{n\vec{b}+(m-n)\vec{c}}{m+n}\right)$$
$$=\frac{sm\vec{a}+tn\vec{b}+(-sn+t(m-n))\vec{c}}{m+n}$$

また，(1)-(i)より，$\overrightarrow{RS}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$.

$$\therefore\ s=\frac{n}{m},\quad t=\frac{m}{n}.$$

$-sn+t(m-n)=-n$ より.

$$-\frac{n^2}{m}+\frac{m}{n}(m-n)=-n$$
$$\Leftrightarrow\ -n^3+m^2(m-n)=-mn^2$$
$$\Leftrightarrow\ m^3-n^3=mn(m-n)$$
$$\Leftrightarrow\ m^3-n^3-mn(m-n)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (m-n)(m^2+n^2)=0.$$

$$\therefore\ m=n. \quad /\!/$$

(ii) 〈証明〉.

$m=n$のとき.

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}.$$
$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{b}.$$



∴ 4点P.Q.R.Sは同一平面上にある ■

(iii). 条件をみたすとき、$\overrightarrow{OG}$ は実数 $s$, $t$ を用いて以下の2通りで表すことができる。

① $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ}$

② $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OR} + t\overrightarrow{RS}$.

①の場合.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b} + s\vec{c}\right\}$$

②の場合.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\vec{c} + t\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{t\vec{a} + t\vec{b} + (1-t)\vec{c}\right\}.$$

$\therefore\ s = t = \frac{1}{2}$.

よって $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ //.

(iv) 〈証明〉.

Gが四面体OABGの外接球の中心であることを示すには、

$$|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CG}|$$

であることを示せばよい。

$$|\overrightarrow{OG}|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a})\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(3 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\right)$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$|\overrightarrow{AG}|^2 = |\overrightarrow{OG} - \vec{a}|^2$$

$$= |\overrightarrow{OG}|^2 - 2\cdot\overrightarrow{OG}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2$$

$$= \frac{3}{8} + 1 - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}\right).$$

$$= \frac{11}{8} - \frac{1}{2}\cdot 2$$

$$= \frac{3}{8}$$

$|\overrightarrow{BG}|^2$, $|\overrightarrow{CG}|^2$ も同様.

$\therefore\ |\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CG}|$

なので、Gは四面体OABCの外接球の中心.

また、半径は

$$|\overrightarrow{OG}| = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$ //

**79** 四面体OABCにおいて，点Gを

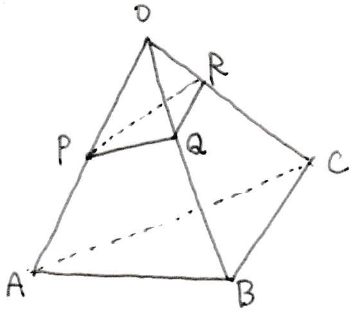
$\overrightarrow{OG} = k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

である点とする，また，3点P, Q, Rを，

$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OC}$

$(0 < p < 1,\ 0 < q < 1,\ 0 < r < 1)$

である点とする。




(1) 点Gが四面体OABCの内部にあるとき，$k$の満たすべき条件を求めよ。ただし，四面体の内部とは，四面体からその表面を除いた部分をさす。

(2) 四面体OABCと四面体OPQRの体積をそれぞれ$V, V'$とするとき，$\dfrac{V'}{V}$を$p, q, r$を用いて表せ。

(3) 4点G, P, Q, Rが同一平面上にあるとき，$k$を$p, q, r$を用いて表せ。

(4) $p = 3k = \dfrac{1}{2}$であって，4点G, P, Q, Rが同一平面上にあるとき，$\dfrac{V'}{V}$の最小値を求めよ。

(1997-6)

(1)

四面体OABCの重心をDとする.

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OG} = 3k\overrightarrow{OD}.$$

また. OD上にGが存在するので. Gが四面体OABCの内部にある条件は.

$$0 < 3k < 1.$$

$$\therefore\ 0 < k < \frac{1}{3} \quad //$$

(2)

点A, Pから $\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{OC}$ が定める平面への垂線の足をA'. P'とおく.

また. $\overrightarrow{OB}$と$\overrightarrow{OC}$のなす角をαとおく.

$$V = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AA'}| \cdot \left\{\frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin\alpha\right\}.$$

$$V' = \frac{1}{3}|\overrightarrow{PP'}| \cdot \left\{\frac{1}{2} OQ \cdot OR \cdot \sin\alpha\right\}.$$

ここで.

$$\frac{PP'}{AA'} = p,\quad \frac{OQ}{OB} = q,\quad \frac{OR}{OC} = r$$

なので.

$$\frac{V'}{V} = pqr \quad //$$

(3)

4点G, P, Q, Rが同一平面上にあるとき.

実数s. tを用いて

$$\overrightarrow{PG} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} \quad \cdots ①$$

と書ける.

また.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP}\\ &= k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - p\overrightarrow{OA}\\ &= (k-p)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

ここで.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\\ &= q\overrightarrow{OB} - p\overrightarrow{OA} \quad \cdots ③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}\\ &= r\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OA}. \quad \cdots ④\end{aligned}$$

①〜④より.

$$\begin{aligned}(k-p)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} &= s(q\overrightarrow{OB} - p\overrightarrow{OA}) + t(r\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OA})\\ &= p(-s-t)\overrightarrow{OA} + sq\overrightarrow{OB} + tr\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

$$\therefore\ k - p = -p(s+t),\ k = sq,\ k = tr.$$

これにより.

$$k - p = -p\left(\frac{k}{q} + \frac{k}{r}\right).$$

$$k\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = 1.$$

$$\therefore\ k = \frac{pqr}{pq + qr + rp} \quad //$$

(4). $k=\frac{1}{6}$, $p=\frac{1}{2}$ より.

$k\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)=1$ に代入して.

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=4.$$

$q, r>0$ より.

$$\frac{\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{r}}$$

辺々逆数とって.

$$\sqrt{qr} \geq \frac{2}{\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ qr \geq \frac{1}{4}$$

$q=r=\frac{1}{2}$ で等号成立.

$$\therefore\ \frac{V'}{V}=pqr \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{8}$$

よって. $\frac{V'}{V}$ の最小値は $\frac{1}{8}$

―//

$\boxed{80}$ 原点Oを中心とする半径1の球面を$S$とし，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$を$S$上の点とする。点Pを通る平面$\alpha$に対して$S$と$\alpha$が交わってできる円周を$C$とする。
次の問いに答えよ。

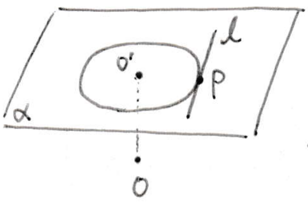
(1) 平面$\alpha$上での点Pにおける$C$の接線$l$は，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$に直交することを示せ。

(2) 球面$S$と点Pで接する平面を$\beta$とする。平面$\beta$と$xy$平面とのなす角を$\theta$として，$\cos\theta$を求めよ。

(3) 平面$\alpha$が点$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0\right)$を通り，さらに直線$l$と$xy$平面のなす角が上で求めた$\theta$であるとする。
このとき，平面$\alpha$の方程式を求めよ。

(1996-2)

(1)



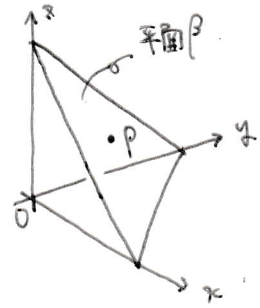

円Cの中心をO'とおく。
直線l上のPではない点をQとおく。
lが円Cの点Pにおける接線より，
$\overrightarrow{O'P} \perp \overrightarrow{PQ}$.

また，$\overrightarrow{OO'}$と平面αは垂直なので，α上のベクトル$\overrightarrow{PQ}$に対し，$\overrightarrow{OO'} \perp \overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P})\cdot\overrightarrow{PQ}$$
$$= \overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{O'P}\cdot\overrightarrow{PQ}$$
$$= 0 + 0 = 0$$

$\therefore\ \overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PQ}$ ■

(2)




平面βは$\overrightarrow{OP}$に垂直で，$P(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$を通るので，βの方程式は

$$\begin{pmatrix} x-1/\sqrt{3} \\ y-1/\sqrt{3} \\ z-1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = 0$$

で表される。
つまり，$x+y+z=\sqrt{3}$ で表される。

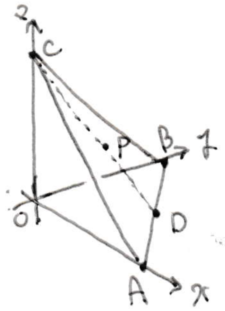
平面βの法線方向のベクトル$(1, 1, 1)$とxy平面に垂直なベクトル$(0, 0, 1)$のなす角がθ。
(ただし $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$)

$$\therefore\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ //

(3)

(2)から，平面βは$A(\sqrt{3}, 0, 0)$，$B(0, \sqrt{3}, 0)$，$C(0, 0, \sqrt{3})$を通る。点Dを$(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, 0)$とし，




AB上の点Qを$(p, \sqrt{3}-p, 0)$とする。(PQ=l である)。
PQとOQのなす角φが(2)のθをみたす。
ここで∠CDOを調べる。
$\cos\angle CDO = 1/\sqrt{3}$.
$\therefore\ \angle CDO = \theta$.

もし，QがDと一致しなければ
$\varphi < \theta$.
であるので，$D=Q$
つまり，直線CDがlと一致する。
よって平面αは$(0, 0, \sqrt{3})$，$(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, 0)$を通る。…①
平面αの方程式を$ax+by+cz+d=0$とおく。
①より $\sqrt{3}c+d=0$. …②
$\sqrt{3}a+\sqrt{3}b+2d=0$. …③

また、仮定より α は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$ を通るので

$$\sqrt{3}a + 2d = 0 \quad \cdots ④$$

②〜④より

$$a = -\frac{2}{\sqrt{3}}d, \quad b = 0,$$

$$c = -\frac{1}{\sqrt{3}}d.$$

よって平面αは、

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}dx - \frac{1}{\sqrt{3}}dz + d = 0$$

つまり

$$2x + z - \sqrt{3} = 0$$

で表される

//

〜平面の方程式〜

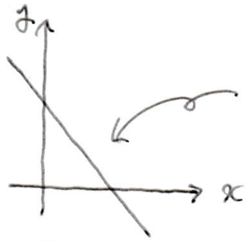
xyz座標空間上の平面の方程式は

$$ax + by + cz + d = 0$$

の形で表すことができる!

⇑ 拡張.

〜直線の方程式〜




$ax + by + c = 0$

で表すことができる.

**81** $xyz$ 空間内に 4 点 A(0, 1, 2), B(0, −1, 2), C(0, 0, 1), ~~D~~ P $(a,\ b,\ 3)$ をとる。ただし，$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ とする。点 P と点 A，B，C とを結ぶ直線が $xy$-平面と交わる点をそれぞれ A', B', C' とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 A', B', C' の座標を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) 三角形 A'B'C' が正三角形となる点 $P=P_0$ を求めよ。

(3) 点 Q が 3 点 A, B, C を通る半円周
$$y^2+(z-2)^2=1,\ x=0,\ z \leqq 2$$
上を動くとき，2 点 $P_0$, Q を結ぶ直線と，$xy$-平面との交点 Q' の軌跡を求めよ。

(1995-2)

(1) $y$-$z$ 平面上の点 $Q(0, p, q)$ をとる．

すると．

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0-a \\ p-b \\ q-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ p-b \\ q-3 \end{pmatrix}.$$

となる．

直線 PQ と．$xy$ 平面の交点を $Q'(x, y, 0)$ とおくと．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 3 \end{pmatrix} + k\overrightarrow{PQ}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -a \\ p-b \\ q-3 \end{pmatrix}.$$

$0 = 3 + k(q-3)$ より．$q \neq 3$ のとき．

$$k = \frac{3}{3-q}$$

と表せるので，点 Q' の座標は．

$$Q'\left(\frac{-aq}{3-q},\ \frac{3p-qb}{3-q},\ 0\right)$$

・Q=A のとき．

$$A'(-2a,\ 3-2b,\ 0).$$

・Q=B のとき

$$B'(-2a,\ -3-2b,\ 0)$$

・Q=C のとき

$$C'\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2},\ 0\right)$$

//

(2)

(1)の結果より

$$\overrightarrow{A'B'} = (0, -6, 0)$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \left(\frac{3}{2}a,\ -3+\frac{3}{2}b,\ 0\right).$$

△A'B'C' が正三角形より．

$$\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'} = |\overrightarrow{A'B'}|\cdot|\overrightarrow{A'C'}|\cdot\cos 60^\circ$$

が成立する．つまり．

$$(-6)\cdot\left(-3+\frac{3}{2}b\right) = 6\cdot\sqrt{\frac{9}{4}a^2+\left(\frac{3}{2}b-3\right)^2}\times\frac{1}{2}$$

$$2\left(\frac{3}{2}b-3\right) = \sqrt{\frac{9}{4}a^2+\left(\frac{3}{2}b-3\right)^2}$$

辺を2乗する．

$$4\left(\frac{3}{2}b-3\right)^2 = \frac{9}{4}a^2+\left(\frac{3}{2}b-3\right)^2$$

$$3\left(\frac{3}{2}b-3\right)^2 = \frac{9}{4}a^2$$

$$4\left(\frac{3}{2}b-3\right)^2 = 3a^2 \quad \cdots ①$$

また．$|\overrightarrow{A'B'}|^2 = |\overrightarrow{A'C'}|^2$ より

$$36 = \frac{9}{4}a^2+\left(\frac{3}{2}b-3\right)^2 \cdots ②$$

①,②より．

$$3a^2 = 4\left(36-\frac{9}{4}a^2\right)$$

$$a^2 = 12.$$

$a \geqq 0$ より　$a = 2\sqrt{3}$.

このとき．①から．

$$\left(\frac{3}{2}b-3\right)^2 = 9. \quad b=0.$$

$$\therefore P_0(2\sqrt{3},\ 0,\ 3)$$

//

(3) 直線PQとxy平面の交わる点 $R(x, y, 0)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -a \\ p-b \\ q-3 \end{pmatrix}$$

であり、これに $a=2\sqrt{3}$, $b=0$ を代入。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}(1-t) \\ tp \\ 3+t(q-3) \end{pmatrix} \cdots ①$$

より、$p = \dfrac{y}{t}$, $q = \dfrac{3(t-1)}{t}$

と表せる。

点 $Q(0, p, q)$ が半円周

$y^2+(z-2)^2=1 \quad (z \leqq 2) \cdots ③$

上にあるので、

$$\left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{3(t-1)}{t} - 2\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{t-3}{t}\right)^2 = 1.$$

$$y^2 = 6t-9. \cdots ③$$

①より、

$$x = 2\sqrt{3}(1-t)$$

$$t = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 1.$$

これを②に代入。

$$y^2 = 6\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}x+1\right) - 9$$

$$= -\sqrt{3}x - 3.$$

また、条件③より、

$$1 \leqq q \leqq 2.$$

なので、

$$1 \leqq \frac{3(t-1)}{t} \leqq 2.$$

$$1 \leqq 3 - \frac{3}{t} \leqq 2.$$

$$1 \leqq \frac{3}{t} \leqq 2.$$

$$\frac{3}{2} \leqq t \leqq 3.$$

$$\frac{3}{2} \leqq \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 1 \leqq 3.$$

$$-4\sqrt{3} \leqq x \leqq -\sqrt{3}.$$

よって、

求める軌跡は、放物線

$y^2 = -\sqrt{3}x - 3$, $z=0$

$(-4\sqrt{3} \leqq x \leqq -\sqrt{3})$ //

(2) 別解。(行列を使う)

$\overrightarrow{A'B'} = (0, -6, 0)$, $\overrightarrow{A'C'} = \left(\frac{3}{2}a, -3+\frac{3}{2}b, 0\right)$

△A'B'C'が正三角形より、

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a \\ -3+\frac{3}{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pm 60^\circ) & -\sin(\pm 60^\circ) \\ \sin(\pm 60^\circ) & \cos(\pm 60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \pm 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$$

(複号同順)

$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ より

$a = 2\sqrt{3}$, $b = 0$ //

**82** 中心が C(0, 1, 1) である半径 1 の球を $S$ とする。点 A(0, 0, 2) および球 $S$ 上の点 B(0, 1, 0) を考える。点 B を通り AC に垂直な平面で球 $S$ を切ることにより得られる円を $K$ とする。点 P が円 $K$ 上にあるとき，直線 AP が $xy$ 平面と交わる点を Q とする。このとき次の問いに答えよ。

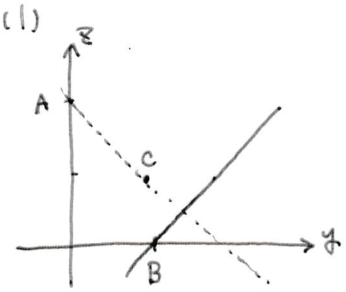
(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を計算せよ。

(2) 点 Q の座標を $(x,\ y,\ 0)$ とし，$\angle\mathrm{QAC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を $x,\ y$ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 $K$ 上を動くときの点 Q の軌跡の方程式を求めよ。

(1993-2)

(1)




$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

より．

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$=1+2=3 \quad //$$

(2)

$$\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

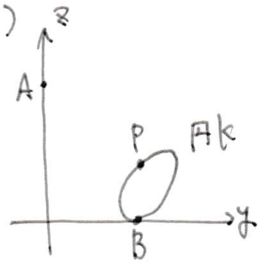
$$=\begin{pmatrix}x\\y\\-2\end{pmatrix}.$$

$|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{x^2+y^2+4}$. $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$.

$\angle QAC=\theta$から．

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{y+2}{\sqrt{2(x^2+y^2+4)}} \quad //$$

(3)




点P．点Bはいずれも円K上より．

$\angle PAC=\angle BAC=\angle QAC=\theta$.

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}$$

より．(2)の結果と合わせて

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{y+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}}.$$

$$\Leftrightarrow\ 9(x^2+y^2+4)=5(y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow\ 9x^2+4\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=9. \quad (y\geq 2 をみたす)$$

$\therefore$ 点Qの軌跡は．

$$9x^2+4\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=9.\quad z=0 \quad //$$

簡単。

**83** 立方体 ABCD-EFGH の辺 AE, CG の中点を，それぞれ L, M とする。点 X が辺 AB 上を動くとき，3 点 L, M, X を通る平面によるこの立体の切り口を $K_X$ とし，この多角形 $K_X$ の周の長さが最小となる点を $X_0$ とする。このとき次の問いに答えよ。

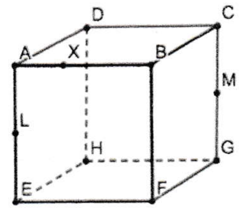
(1) AB$=2$，AX$=2t$ として，$K_X$ の周の長さ $s(t)$ を表す式を求めよ。

(2) $X_0$ は辺 AB の中点であることを示せ。

(3) 直線 DF は L, M, $X_0$ を通る平面に垂直であることを証明せよ。

(4) $\angle LX_0M$ を求めよ。

(1992-4)




(1) $LX=\sqrt{1+4t^2}$.

$XY=2\sqrt{2}(1-t)$ であり．対称性から．

$s(t)=4\times LX+2\times XY$.

$=4\sqrt{1+4t^2}+4\sqrt{2}(1-t)$ //

(2) $s'(t)=\dfrac{16t}{\sqrt{1+4t^2}}-4\sqrt{2}$.

ここで．$s'(t)=0$ とおくと

$\dfrac{16t}{\sqrt{1+4t^2}}-4\sqrt{2}=0$.

$4t=\sqrt{2(1+4t^2)}$

辺を2乗して

$16t^2=2(1+4t^2)$

$t=\pm\dfrac{1}{2}$.

ここで．$0<t<1$ なので

$t=\dfrac{1}{2}$

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $s$ | | ↘ | 小 | ↗ | |

増減表から．$s(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ で最小値をとる．

$\therefore AX_0=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$.

$\therefore X_0$ は AB の中点

(3) $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$．$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおくと

$\overrightarrow{DF}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

$\overrightarrow{X_0L}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{X_0M}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$． と表すことができる.

$\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{X_0L}$ と $\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{X_0M}$ を示すことで

題意は示せる．

実際に．

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{X_0L}=(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c})$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)$

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{X_0M}=(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c})$

$=-|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$

$+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}|\vec{c}|^2$

よって．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$.

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ なので．

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{X_0L}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{X_0M}=0$.

$\therefore \overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{X_0L}$，$\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{X_0M}$ なので

直線DFと L．M．$X_0$を通る平面は垂直

(4) $\overrightarrow{X_0 L} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .

$\overrightarrow{X_0 M} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .

$|\overrightarrow{X_0 L}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{X_0 M}| = \sqrt{6}$ . であり.

$$\cos\angle LX_0M = \frac{\overrightarrow{X_0 L}\cdot\overrightarrow{X_0 M}}{|\overrightarrow{X_0 L}|\cdot|\overrightarrow{X_0 M}|}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2}{2\sqrt{3}}.$$

$$= 0.$$

$\therefore \cos\angle LX_0M = 0$

$0 < \angle LX_0M < \pi$ より.

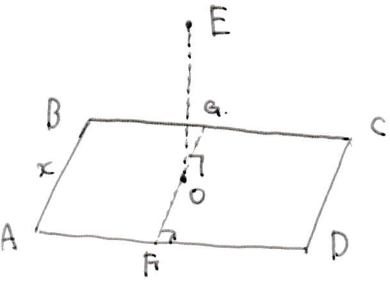
$$\angle LX_0M = \frac{\pi}{2}$$ //

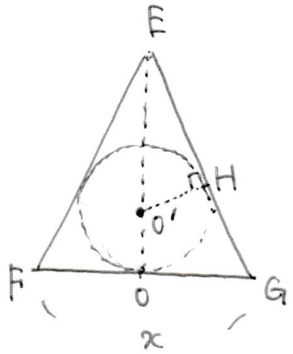
**84** 1辺の長さ $x$ の正方形 ABCD の中心を O とし，O を通りこの正方形に垂直な直線上に頂点 E をもつ四角錐 ABCDE を考える。

(1) 半径 1 の球がこの四角錐に内接しているとき，高さ $\overline{\mathrm{EO}}$ を $x$ で表せ。

(2) (1) の四角錐の体積が最小となる $x$ の値とその最小値を求めよ。

(1991-1)




(1) $EO = y$ とおく。

BC, AD の中点を各々 G, F とおく。

$$OG = \frac{1}{2}x$$

$$EG = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}x^2}$$

四角錐に内接する球の中心を O' とし、EG と球の接点を H とおく。

$$\triangle OEG \backsim \triangle HEO'$$

であるので、

$$OG : HO' = EG : EO'$$

$$\frac{1}{2}x : 1 = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}x^2} : (y-1)$$

$$\frac{1}{2}x(y-1) = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}x^2}$$

辺々2乗して、

$$\frac{1}{4}x^2(y-1)^2 = y^2 + \frac{1}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2(y^2 - 2y) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(y-2) = 4y$$

$$\Leftrightarrow y(x^2-4) = 2x^2$$

$$\therefore y = \frac{2x^2}{x^2-4}$$

ここで、$x \neq 2$ を示す必要があるが、内接する球の半径が 1 であることから $x > 2$ は明らか。

$$\therefore \overline{EO} = \frac{2x^2}{x^2-4}$$

//

(2) 体積を $V$ とおく。

$$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{2x^2}{x^2-4}$$

$$= \frac{2x^4}{3(x^2-4)}$$

$$V' = \frac{8x^3 \cdot 3(x^2-4) - 2x^4 \cdot 6x}{9(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{4x^3(x^2-8)}{3(x^2-4)^2}$$

$V' = 0$ となるのは $x = 0, \pm 2\sqrt{2}$ のとき。

増減表は以下である。

| $x$ | 2 | $\cdots$ | $2\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $V'$ | / | $-$ | 0 | $+$ |
| $V$ | / | ↘ | 極小 | ↗ |

表より、$x = 2\sqrt{2}$ で $V$ は最小値をとる。

このときの値は、

$$V_{min} = \frac{2 \cdot (2\sqrt{2})^4}{3(8-4)}$$

$$= \frac{32}{3}$$

//