85 関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい，p を周期という。正の周期のうち最小のものを特に基本周期という。例えば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき，次の問いに答えよ。

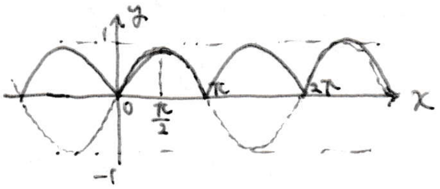
(1) $y=|\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。

(2) 自然数 $m,\ n$ に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=|\sin mx|\sin nx$ とおく。p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f(\frac{p}{2})=f(-\frac{p}{2})=0$ が成り立つことを示せ。
また，このとき mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍であることを示せ。

(3) $m,\ n$ は 1 以外の公約数を持たない自然数とする。(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx|\sin nx$ の基本周期を求めよ。

(2007-5)

(1) $y=|\sin x|$ のグラフは、$y=\sin x$ の $y<0$ の部分を x 軸に関して対して折り返したものであり. 下図の実線部.



$|\sin x|$ の周期を p とすると.

$|\sin(x+p)|=\sin x$.

この等式は x に関しての恒等式なので

$|\sin(0+p)|=\sin 0$.

$\sin p=0$.

$\therefore p=\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$

逆に、

$|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|$
$=|\sin x|$.

となり $f(x+\pi)=f(x)$ をみたす.

$\therefore |\sin x|$ の基本周期は π. //

(2) $f(x)=|\sin mx|\sin nx$ において.

周期が p であるならば

$f(x+p)=f(x)$.

この等式は x についての恒等式であるので、

$x=-\frac{p}{2}$ を代入して

$f(-\frac{p}{2}+p)=f(-\frac{p}{2})$

$\therefore f(\frac{p}{2})=f(-\frac{p}{2})$.

また、

$f(\frac{p}{2})=|\sin m\frac{p}{2}|\sin n\frac{p}{2}$

$=|-\sin m(-\frac{p}{2})|\{-\sin n(-\frac{p}{2})\}$

$=-|\sin m(-\frac{p}{2})|\cdot\sin n(-\frac{p}{2})$

$=-f(-\frac{p}{2})$

より. $f(\frac{p}{2})=-f(-\frac{p}{2})$

よって $f(\frac{p}{2})=-f(-\frac{p}{2})=0$ //

$|\sin m\frac{p}{2}|\cdot\sin n\frac{p}{2}=0$ より.

$\frac{mp}{2}=k\pi$, または $\frac{np}{2}=l\pi$ (k, l: 整数).

つまり.

$mp=2k\pi$, $np=2l\pi$.

また、$f(x+p)=f(x)$ より.

$|\sin m(x+p)|\cdot\sin n(x+p)=|\sin mx|\sin nx$.

$|\sin(mx+mp)|\cdot\sin(nx+np)=|\sin mx|\sin nx$.

(i) $mp=2k\pi$ のとき.

$|\sin mx|\sin(nx+np)=|\sin mx|\sin nx$.

$\therefore np=2l'\pi$ (l': 整数).

(ii) $np=2l\pi$ のとき.

$|\sin(mx+mp)|\sin nx=|\sin mx|\sin nx$

$\therefore mp=k'\pi$. (k': 整数).

以上より. mp は π の整数倍であり. np は 2π の整数倍 //

(3) (2)より

$mp = k'\pi$, $np = 2l'\pi$.

この2式より，pを消去．

$nk' = 2ml'$

m, nは1以外に公約数をもたない数なので

k''：整数として，

$k' = k''m$.

よって

$mp = k''m\pi$. $\therefore p = k''\pi$.

$p=\pi$とすると，

$$f(x+\pi) = |\sin(mx+m\pi)|\sin(nx+n\pi)$$
$$= |\sin mx|\sin(nx+n\pi).$$
$$= \begin{cases} |\sin mx|\sin nx = f(x) & (n:\text{偶数}) \\ -|\sin mx|\sin nx = -f(x) & (n:\text{奇数}). \end{cases}$$

$p=2\pi$とすると

$$f(x+2\pi) = |\sin(mx+2m\pi)|\sin(nx+2n\pi)$$
$$= |\sin mx|\sin nx = f(x)$$

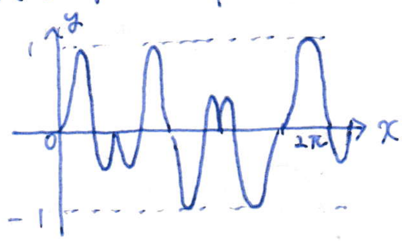
以上より．

$|\sin mx|\sin nx$の基本周期は．

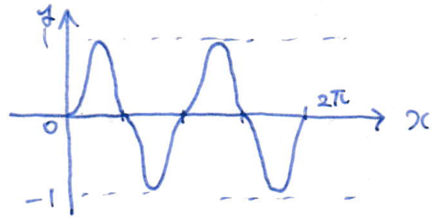
$\begin{cases} n\text{が偶数} \Rightarrow \pi. \\ n\text{が奇数} \Rightarrow 2\pi \end{cases}$ //.

～参考～

$f(x) = |\sin 2x|\sin 3x$ のグラフ．



$f(x) = |\sin 2x|\sin 2x$ のグラフ．



難題．

$\boxed{86}$ 関数

$$f(x) = \left|\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right|$$

を考える。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，

$$F(a) = \int_0^a f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) $F(a)$ を求めよ。

(2006-4)

(1) $f(x) = 0 \iff \left|\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right| = 0$

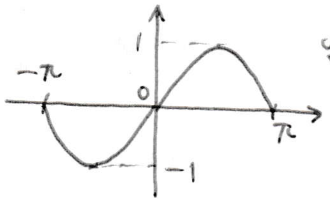
$\iff \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

$\therefore \sin x = 0, 1 \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$

よって条件をみたす x は

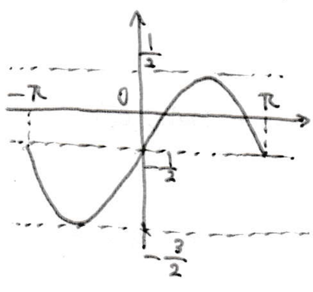
$x = -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ //

(2) ・$y = \sin x$ のグラフを描く.



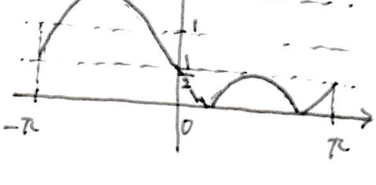
$y = \sin x$

・y軸方向に $-\frac{1}{2}$ 平行移動.



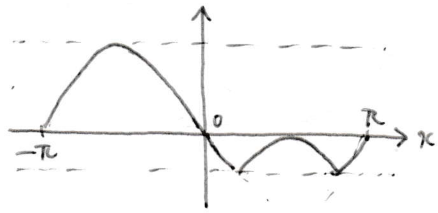
$y = \sin x - \frac{1}{2}$.

・絶対値をとる.



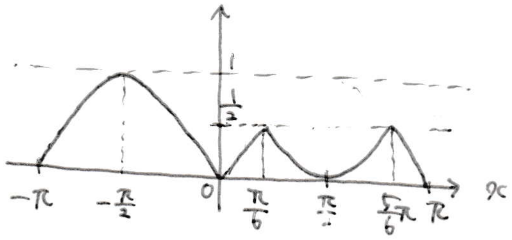
$y = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$

・y軸方向に $-\frac{1}{2}$ 平行移動.



$y = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$

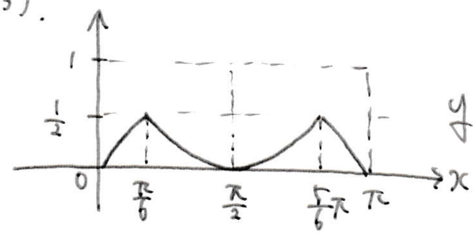
・絶対値をとる.



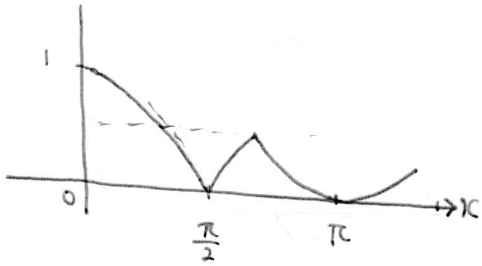
このグラフが $y = f(x)$

$= \left|\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right|$ のグラフである //

(3).



$y=f(x)$.



$y=f(x-\frac{\pi}{2})$.

$0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$f(x-\tfrac{\pi}{2}) = \cos x.$$

$0\leqq x\leqq \frac{\pi}{6}$ の範囲で

$$f(x)=\sin x.$$

$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$f(x)=1-\sin x.$$

であるので、$0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}$ で.

$$f(x)\cdot f(x-\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} \sin x\cdot\cos x & (0\leqq x\leqq \frac{\pi}{6}) \\ (1-\sin x)\cdot\cos x & (\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

となる.

(i) $0\leqq a\leqq \frac{\pi}{6}$ のとき.

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^a \sin x\cdot\cos x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \sin 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}(1-\cos 2a) \end{aligned}$$

(ii) $\frac{\pi}{6}\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき.

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\cos x + \int_{\frac{\pi}{6}}^a (1-\sin x)\cos x\,dx \\ &= \frac{1}{8}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{8}+\left[\sin x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin a+\frac{1}{4}\cos 2a-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(i).(ii)より

$$F(a)=\begin{cases} \frac{1}{4}(1-\cos 2a) & (0\leqq a\leqq\frac{\pi}{6}) \\ \sin a+\frac{1}{4}\cos 2a-\frac{1}{2} & (\frac{\pi}{6}\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$\boxed{87}$ 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\frac{3}{2}\right] = 1, [2] = 2$ である。このとき，$0 < \theta < \pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] \geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2005-4)

(1) 真数条件より.

$\left[\frac{5}{2} + \cos\theta\right] > 0$ なので.

$\frac{5}{2} + \cos\theta \geqq 1$.

つまり $\cos\theta \geqq -\frac{3}{2}$ …①

また.

$\log_2\left[\frac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 1$.

$\left[\frac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 2$

$\frac{5}{2} + \cos\theta < 3$.

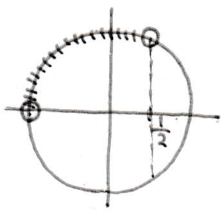
$\cos\theta < \frac{1}{2}$ …②

①②と. $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より.

$-1 \leqq \cos\theta < \frac{1}{2}$.

$0 < \theta < \pi$ から.

$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$.



(2) 真数条件より.

$\sin x > 0$. …③

また.

$\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] \geqq 1$

$\frac{3}{2} + \log_2 \sin\theta \geqq 1$

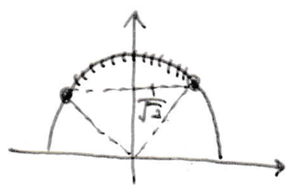
$\log_2 \sin\theta \geqq -\frac{1}{2}$

$\sin\theta \geqq 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ …④

③,④より.

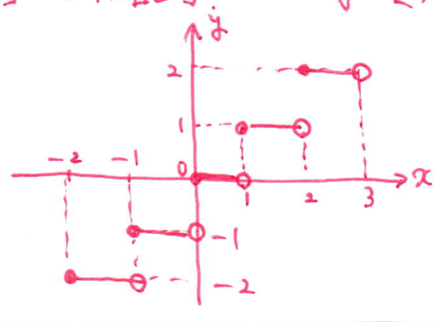
$\sin\theta \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$.



これは $0 < \theta < \pi$ をみたしている.

[ ]：ガウス記号　　$y = [x]$ のグラフ.



(3) (i) $0<\theta<\pi$ より.

$-1<\cos\theta<1$.

$\frac{3}{2}<\frac{5}{2}+\cos\theta<\frac{7}{2}$

∴ $\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1, 2, 3$

∴ 左辺は.

$\log_2 1$, $\log_2 2$, $\log_2 3$ のいずれか.

よって, 0, 1, $\log_2 3$ のいずれかである.

(ii) $0<\theta<\pi$ より

$0<\sin\theta\leqq 1$

$\log_2\sin\theta\leqq 0$.

∴ $\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\leqq\frac{3}{2}$.

よって $\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ は 1 以下の整数.

題意が成立する為には.

$$\begin{cases}(\text{左辺})=0 \text{ かつ } (\text{右辺})=0 \\ (\text{左辺})=0 \text{ かつ } (\text{右辺})=1 \\ (\text{左辺})=1 \text{ かつ } (\text{右辺})=1\end{cases} \quad \cdots (※)$$

のいずれかである.

さて,

・$(\text{左辺})=\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1$

$\Leftrightarrow 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<2$.

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leqq\cos\theta<-\frac{1}{2}$

∴ $\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$.

・$(\text{左辺})=\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1$

$\Leftrightarrow \left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=2$

$\Leftrightarrow 2\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<\frac{1}{2}$

∴ $\frac{2}{3}\pi<\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$.

・$(\text{右辺})=\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]=0$

$\Leftrightarrow 0\leqq\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta<1$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leqq\log_2\sin\theta<-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqq\sin\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $\begin{cases}\alpha\leqq\theta<\frac{\pi}{4} \\ \frac{3}{4}\pi<\theta\leqq\pi-\alpha.\end{cases}$

・$(\text{右辺})=\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]=1$

$\Leftrightarrow 1\leqq\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta<2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqq\log_2\sin\theta<\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\theta<\sqrt{2}$

∴ $\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi$.

(※)から.

$$\begin{cases}\frac{3}{4}\pi<\theta\leqq\pi-\alpha \\ \frac{2}{3}\pi<\theta\leqq\frac{3}{4}\pi \\ \frac{\pi}{3}<\theta\leqq\frac{2}{3}\pi\end{cases}$$

まとめると

$\frac{\pi}{3}<\theta<\pi-\alpha$

//

$\boxed{88}$ $f(x) = ax + e^{-x}\sin x$, $g(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ とする。

(1) $y = g(x)$ $(x \geqq 0)$ のグラフの概形を描け。

(2) $f(x)$ が区間 $0 < x < 2\pi$ 内で極値として極大値のみを 1 つだけもつとき，a の範囲を定めよ。

(1991-5)

(1) $y = g(x)$

$= e^{-x}(\cos x - \sin x)$

$y' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x)$

$= -e^{-x} \cdot 2\cos x$

$= -2e^{-x} \cdot \cos x$.

$y'=0$ となるのは.

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

増減表は以下である.

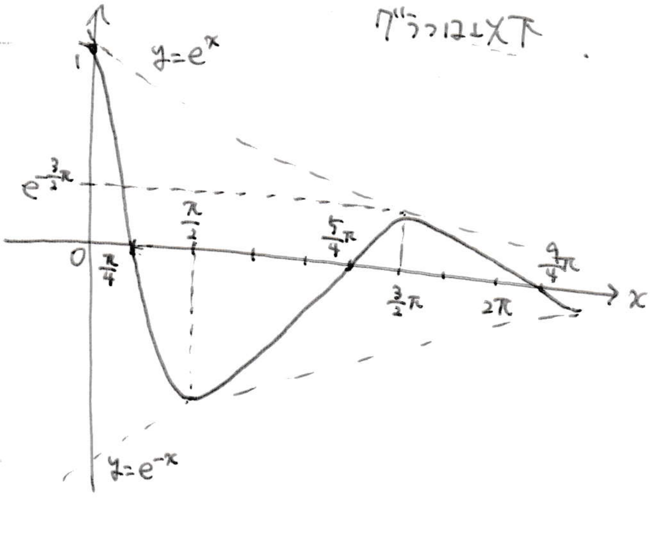
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	
y	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		

ここで、$y=0$ となるのは

$\cos x = \sin x$

となるとき.

つまり $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$



(2) $f(x) = ax + e^{-x}\sin x$.

$f'(x) = a - e^{-x}\sin x + e^{-x}\cdot\cos x$

$= a + e^{-x}(\cos x - \sin x)$

$= a + g(x)$.

よって. $f'(x)$ のグラフは $y=g(x)$ のグラフを y 軸方向に a だけ平行移動させたもの.

$f(x)$ が $0 < x < 2\pi$ で極値として極大値を1つのみもつには.

符号の変化が1回のみであり なおかつ変化は正→負である場合である.

$y=f(x)$ のグラフと $y=-a$ の共有点から.

$e^{-\frac{3}{2}\pi} \leqq -a \leqq 1$.

$\therefore$ $-1 \leqq a \leqq -e^{-\frac{3}{2}\pi}$ //