$\boxed{89}$ 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する。$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

(2014-5)

平均値の定理

$[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ に対し，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

をみたす c が a と b の間に存在する．

〈証明〉．

題意を示す為には，

$f'(x)$ が区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ で，符号の変化が1回のみであることを示せばよい．

$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ より．

$$f_n(1) = 0,\quad f_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0,\ \cdots,\ f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = 0.$$

平均値の定理より．

$f_n(x)$ に対し，

$\frac{1}{k+1} < c_k < \frac{1}{k}$ かつ

$$f_n'(c_k) = \frac{f\left(\frac{1}{k+1}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} = 0$$

をみたす c_k が存在する．

よって，$f_n'(x) = 0$ は，

$$\frac{1}{n} < c_{n-1} < \frac{1}{n-1} < \cdots < \frac{1}{2} < c_1 < 1.$$

をみたす $(n-1)$ 個の実数

$$c_1, \cdots, c_{n-1}$$

を解にもつ．

また，$f_n(x)$ は n 次なので，

$f'_n(x)$ は $(n-1)$ 次．

$\therefore$ $f'_n(x) = 0$ は高々 $(n-1)$ 個の解しかもたない．

つまり，$c_1, \cdots, c_{n-1}$ が $f'_n(x) = 0$ の解のすべて．

ここで，c_k の前後では，$f'_n(x)$ の符号は必ず変化する．

$\because$) もし変化しないと仮定すると，

$f_n(x)$ は $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ で単調増加 or 減少．

これは，$f\left(\frac{1}{k+1}\right) = f\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ であることに矛盾する．$\perp$．

よって，$f_n(x)$ は区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ で唯一つの極値をとる ■

代数学の基本定理

複素数係数 n 次方程式 $f(x) = 0$ は，複素数の範囲で，重複度も含めちょうど n 個の解をもつ．

$\boxed{90}$ 曲線 $y=e^x$ 上を動く点Pの時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，Pの速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。全ての時刻 t で $|\vec{v}|=1$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1) Pが点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2) Pが点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3) Pが曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

(2009-5)

(1) $y=e^x$ より．

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=\frac{dx}{dt}\cdot e^x$$
$$\therefore \vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ e^x\frac{dx}{dt}\right)$$

また．$|\vec{v}|=1$ より．

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(e^x\frac{dx}{dt}\right)^2}$$
$$=\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\sqrt{1+e^{2x}}=1.$$
$$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

よって．$\vec{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$ //

(2) $\dfrac{dx}{dt}=X$ とおく．

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dX}{dt}$$
$$=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dX}{dx}$$

ここで，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}=(1+e^{2x})^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dX}{dx}=-\frac{1}{2}\cdot 2e^{2x}\cdot(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}$$
$$=-e^{2x}\cdot(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}$$

であるので，

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dX}{dx}=(1+e^{2x})^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-e^{2x}\cdot(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$=-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

$\dfrac{dy}{dt}=Y$ とおく．

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dY}{dt}$$
$$=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dY}{dx}.$$

ここで，

$$Y=\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot e^x$$
$$=e^x(1+e^{2x})^{-\frac{1}{2}}.$$
$$\frac{dY}{dx}=e^x\cdot(1+e^{2x})^{-\frac{1}{2}}+e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2e^{2x}(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}$$

であるので，

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dY}{dx}=(1+e^{2x})^{-\frac{1}{2}}\cdot\left\{e^x(1+e^{2x})^{-\frac{1}{2}}-e^{3x}(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}\right\}$$
$$=e^x(1+e^{2x})^{-1}-e^{3x}(1+e^{2x})^{-2}$$
$$=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}$$

よって $\vec{\alpha}=\left(-\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2},\ \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\right)$ //

(3) $|\vec{\alpha}| \geqq 0$ より. $|\vec{\alpha}|^2$ が最大値をとるとき.
$|\vec{\alpha}|$ も最大値となる.

$$|\vec{\alpha}|^2 = \left\{\left(\frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\right)^2 + \left(\frac{e^{x}}{(1+e^{2x})^2}\right)^2\right\}^2$$

$$= \left(\frac{e^{x}}{(1+e^{2x})^2}\right)^2 \times \left((-e^{x})^2 + 1^2\right)$$

$$= \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}$$

ここで、$f(t) = \dfrac{t}{(1+t)^3}$ とおく. $(t = e^{2x} > 0)$

e^{2x} が単調増加であるので、$f(t)$ の最大値が $|\vec{\alpha}|^2$ の最大値となる.

$$f'(t) = \frac{(1+t)^3 - t \cdot 3(1+t)^2}{(1+t)^6}$$

$$= \frac{1-2t}{(1+t)^4}$$

増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
f'	/	$+$	0	$-$
f	/	↗	大	↘

上の表より. $f(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ で最大値.

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{4}{27}$$

をとる.

つまり. $|\vec{\alpha}|^2$ の最大値は $\dfrac{4}{27}$.

$|\vec{\alpha}| \geqq 0$ より $|\vec{\alpha}|$ の最大値は $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ //

(1), (2) は計算ミスに注意すれば OK.
(3) は、$t = e^{2x}$ とおくことで、計算を容易にする方がよい.

91 $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$ に対して

$$I_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx$$

とおく。ただし，$0!=1$ とする。

(1) I_0 の値を求め，$n=1,\ 2,\ \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。

(2004-1)

(1) $I_0=\int_0^2 e^x dx$

$=e^2-1$ //

$I_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx$

$=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{\left[x^n e^x\right]_0^2-\int_0^2 n\cdot x^{n-1}\cdot e^x dx\right\}$

$=\frac{(-1)^n}{n!}2^n\cdot e^2-\boxed{\frac{(-1)\cdot(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int_0^2 x^{n-1}\cdot e^x dx}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ " I_{n-1}

$=\frac{e^2\cdot(-1)^n\cdot 2^n}{n!}+I_{n-1}$

よって. I_n と I_{n-1} の関係式は.

$I_n=\frac{e^2\cdot(-1)^n\cdot 2^n}{n!}+I_{n+1}$ //

さて.

$I_1=\frac{e^2\cdot(-2)}{1!}+I_0$

$=-2e^2+(e^2-1)=-(e^2+1)$

$I_2=\frac{e^2\cdot(-1)^2\cdot 2^2}{2!}+I_1$

$=2e^2-(e^2+1)=e^2-1$

よって.

$I_3=\frac{e^2\cdot(-1)^3\cdot 2^3}{3!}+I_2$

$=-\frac{4}{3}e^2+(e^2-1)=-\frac{1}{3}e^2-1$ //

(2) 〈証明〉.

$0\leqq x\leqq 2$ で. $e^x\leqq e^2$ より. $x^n\geqq 0$ なので

$x^n\cdot e^x\leqq x^n\cdot e^2$

が成立.

$\therefore \int_0^2 x^n\cdot e^x dx\leqq\int_0^2 x^n\cdot e^2 dx$

$=e^2\int_0^2 x^n dx$

$=e^2\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^2$

$=\frac{e^2}{n+1}\cdot 2^{n+1}$

辺々 $n!>0$ で割る.

$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n\cdot e^x dx\leqq\frac{1}{n!}\cdot\frac{e^2}{n+1}2^{n+1}$

$=e^2\cdot\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ …①

$=e^2\cdot\frac{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{(n+1)\cdot n\cdot\cdots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

($n\geqq 2$ のとき).

$\leqq e^2\cdot\frac{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

$=e^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2\cdot 2}{2\cdot 1}$

$=2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ …(＊)

ここで. $n=1$ のとき.

① $=e^2\cdot\frac{2^2}{2!}=2e^2$ で(＊)をみたす.

$\therefore n=1,2,\cdots$ で

$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ が成立

(3).

(2)より.

$$I_n = I_{n-1} + \frac{e^2\cdot(-2)^n}{n!}$$

つまり

$$I_n - I_{n-1} = \frac{e^2\cdot(-2)^n}{n!}$$

よって.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^2\cdot(-2)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1})$$

$$= I_n - I_0.$$

ここで, $k=0$のとき

$$\frac{e^2\cdot(-2)^k}{k!} = e^2.$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} \frac{e^2\cdot(-2)^k}{k!} = e^2 + I_n - I_0.$$

$$= e^2 + I_n - (e^2 - 1)$$

$$= 1 + I_n.$$

ここで,

$$|I_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx\right|$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx$$

$$\leqq 2e^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad ((2)より)$$

$$\to 0 \qquad (\text{as } n\to\infty)$$

∴ はさみうちの原理から.

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

よって.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^2\cdot(-2)^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}(1+I_n)$$

$$= 1.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!} = \frac{1}{e^2}$$

//

$\boxed{\textbf{92}}$ n を 2 以上の自然数とする。数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている。

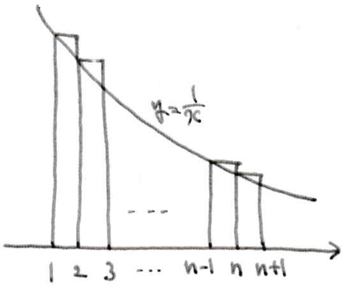
(1) 不等式
$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$$
が成り立つことを示せ。

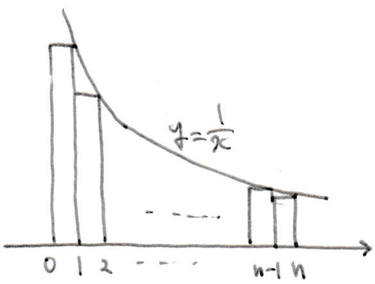
(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$
が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ。

(3) 不等式
$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$
が成り立つことを示せ。

(2003-5)

(1) 〈証明〉





左図から．
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
$$\Big[\log x\Big]_1^{n+1} < S_n.$$
$$\therefore\ \log(n+1) < S_n.$$

右図から．
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx$$
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \Big[\log x\Big]_1^{n}$$
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n$$
$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \log n$$
$$\therefore\ S_n < 1 + \log n$$

よって．$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ ∎

(2) 〈証明〉．

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k (b_{k+1} - b_k)$$
$$= a_1(b_2 - b_1) + a_2(b_3 - b_2) + a_3(b_4 - b_3) + \cdots + a_{n-1}(b_n - b_{n-1})$$
$$= -a_1b_1 + b_2(a_1 - a_2) + b_3(a_2 - a_3) + \cdots + b_{n-1}(a_{n-2} - a_{n-1}) + a_{n-1}b_n.$$
$$= -a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n-2} b_{k+1}\Delta a_k + a_{n-1}b_n.$$
$$= -a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n-2} b_{k+1}\Delta a_k - b_n(a_n - a_{n-1}) + a_nb_n.$$
$$= -a_1b_1 + a_nb_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k$$

よって．
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_nb_n - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k$$
∎

(2) 続き.

前半で示した等式の中で.

$a_k = S_k$,　$\Delta b_k = k$

とおく.

$\Delta b_k = k$ より,

$b_{k+1} - b_k = k$.

$\therefore\ b_k = b_1 + \dfrac{k(k-1)}{2}$

$n \geqq 2$ で.

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot S_k = S_n \cdot b_n - S_1 \cdot b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta S_k.$$

$$= S_n \cdot \left(b_1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) - 1 \cdot b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_1 + \frac{k(k+1)}{2}\right) \cdot \frac{1}{k+1}$$

$$= S_n \cdot b_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot S_n - b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_1 \cdot \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2}$$

ここで,

$$-b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_1 \frac{1}{k+1} = -b_1\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= -b_1 \cdot S_n.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n-1)$$

より.

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot S_k = S_n b_1 + S_n \frac{n(n-1)}{2} - b_1 \cdot S_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\left(S_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ P(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

//

(3)

(2) の後半より.

$$\sum_{k=1}^{n-1} k S_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) \frac{n(n-1)}{2}$$

$n \geqq 2$ より.

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot S_k = S_n - \frac{1}{2}.$$

(1) より.

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n.$$

ここで, $n \geqq 2$ で.

$$\log n < \log(n+1)$$

なので

$$\log n < S_n < 1 + \log n.$$

$$-\frac{1}{2} + \log n < S_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \log n.$$

$$-\frac{1}{2} < S_n - \frac{1}{2} - \log n < \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ -\frac{1}{2} < \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot S_k - \log n < \frac{1}{2}$$

よって.

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot S_k - \log n \right| < \frac{1}{2}.$$

■

誘導に従って解いていけば簡単な問題.
(2) の証明は Σ が見にくければ
書き下せば ok.

93 次の問いに答えよ。

(1) 全ての正の実数 x, y に対して，不等式
$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$
が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a, b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$
を満たす。このとき，不等式
$$\int_a^b f(x)\log f(x)dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)dx$$
が成り立つことを示せ。

(3) 1, b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値を取る連続関数 $f(x)$ に対して正の実数 M を
$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
とする。不等式
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)dx \geqq M\log M$$
が成り立つことを示せ。

(2002-3)

(1)〈証明〉.

yを固定し.

$f(x) = x\log x - x\log y - x + y$

とおく.

$f'(x) = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} - \log y - 1.$

$= \log x - \log y.$

x	0	$\cdots$	y	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↘	0	↗

増減表より. $f(x) \geqq 0$ である.

yを正の実数の範囲で動かしても不等式は成立.

$\therefore\ x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$

が すべての正の実数x, yで成立 □

(2)〈証明〉.

$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$

$= \int_a^b f(x)\left(\log f(x) - \log g(x)\right)dx$

ここで,

$[a, b]$ において $f(x), g(x) > 0$ であるので,

(1)の結果から. $x(\log x - \log y) \geqq x - y$.

より. $x = f(x)$. $y = g(x)$ とおけば

(与式) $\geqq \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

ここで, 問題文の仮定から.

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

$\therefore\ \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = 0.$

よって.

$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx \geqq 0.$

$\therefore\ \int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$

□

(3) 〈証明〉

閉区間 $[a, b]$ で $f(x) > 0$ より.

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

$$\therefore\ M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

ここで, 定数関数

$$g(x) = M.\ > 0$$

と考える.

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b M\,dx$$
$$= \Big[Mx\Big]_a^b = (b-a)M.$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

より. (2) の仮定が成立.
∴ 不等式も成り立ち.

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)\log M\,dx$$
$$= \log M\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \log M\cdot(b-a)\cdot M.$$

$$\therefore\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M.$$

㈣

94 正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える。与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x) = x^p - ax^{p-3} \\ g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする。ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。次の問いに答えよ。

(1) $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x\text{ の 2 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(2) $p = 2$ とする。このとき，$g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x\text{ の 1 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(3) $a = 9$, $p = 2$ とする。$2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$ に注意して，不等式

$$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ。また，$\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなはち，小数第 4 位以下を切り捨てよ)。

(2002-5)

(1) 〈証明〉.

$f(x) = x^p - ax^{p-3}$.

$f'(x) = p\,x^{p-1} - a(p-3)x^{p-4}$ より.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= x - \frac{x^p - a x^{p-3}}{p\cdot x^{p-1} - a(p-3)x^{p-4}}$$

$$= \frac{p\cdot x^p - a(p-3)x^{p-3} - x^p + a x^{p-3}}{p\cdot x^{p-1} - a(p-3)x^{p-4}}$$

$$= \frac{(p-1)x^p - (p-4)x^{p-3}}{p\cdot x^{p-1} - a\cdot(p-3)x^{p-4}}$$

$$= \frac{(p-1)x^4 - (p-4)x}{px^3 - a(p-3)}$$

$$\therefore\ g(x) - \sqrt[3]{a} = \frac{(p-1)x^4 - (p-4)x - p\sqrt[3]{a}\cdot x^3 - a\sqrt[3]{a}(p-3)}{px^3 - a(p-3)}$$

ここで. 分子は

$$(x^2 - 2\sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2}) \times$$
$$((p-1)x^2 + \sqrt[3]{a}(p-2)x + \sqrt[3]{a^2}(p-3))$$

と書けるので.

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \frac{(p-1)x^2 + \sqrt[3]{a}(p-2)x + \sqrt[3]{a^2}(p-3)}{px^3 - a(p-3)}$$

ここで $p \geqq 2$ なので $(p-1) \neq 0$. $p \neq 0$

∴ 分子は x の 2 次式. 分母は 3 次式.

(2) 〈証明〉.

(1) で求めた式に $p=2$ を代入.

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \frac{x^2 - \sqrt[3]{a^2}}{2x^3 + a}$$

ここで

$$x^2 - \sqrt[3]{a^2} = (x - \sqrt[3]{a})(x + \sqrt[3]{a})$$

$$\therefore\ g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \frac{x + \sqrt[3]{a}}{2x^3 + a}.$$

よって題意を示せた.

(3) 〈証明〉.

・$0 < \sqrt[3]{9} - g(2)$ を示す.

(2)で求めた式に $a=9$, $p=x=2$ を代入.

$$\sqrt[3]{9} - g(2) = (\sqrt[3]{9}-2)^3 \frac{2+\sqrt[3]{9}}{25}$$

よって. $2^3 = 8$ より $\sqrt[3]{9} > 2$

$\therefore$ $\sqrt[3]{9} - g(2) > 0$.

・$\sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$ を示す.

$$\frac{1}{1000} - (\sqrt[3]{9} - g(2))$$
$$= \frac{1}{1000} - (\sqrt[3]{9}-2)^3 \frac{2+\sqrt[3]{9}}{25}$$
$$> \frac{1}{1000} - (2.1-2)^3 \frac{2+\sqrt[3]{9}}{25}$$
$$(\because 2.1^3 > 9)$$
$$= \frac{1}{1000} - \left(\frac{1}{10}\right)^3 \frac{2+\sqrt[3]{9}}{25}$$
$$= \frac{1}{1000}\left(1 - \frac{2+\sqrt[3]{9}}{25}\right)$$
$$> \frac{1}{1000}\left(1 - \frac{2+2.1}{25}\right) > 0$$

$\therefore$ $\sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$

$\blacksquare$

前半部の証明より

$$g(2) < \sqrt[3]{9} < g(2) + \frac{1}{1000}.$$

$g(2)$ を求める.

よって. $a=9$, $p=2$ のとき

$$f(x) = x^2 - \frac{9}{x}.$$
$$f'(x) = 2x + \frac{9}{x^2}$$
$$\therefore\ g(x) = x - \frac{x^2 - \frac{9}{x}}{2x + \frac{9}{x^2}}$$

よって $g(2) = 2 - \dfrac{4 - \frac{9}{2}}{4 + \frac{9}{4}}$

$$= 2 - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{25}{4}} = 2 + \frac{2}{25}$$
$$= \frac{52}{25}$$
$$= \frac{208}{100} = 2.08$$

$\therefore$ $2.08 < \sqrt[3]{9} < 2.08 + \frac{1}{1000}$

つまり $2.080 < \sqrt[3]{9} < 2.081$.

よって $\sqrt[3]{9} \fallingdotseq 2.080$ //

95 関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ が常に増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a=0$ の時，関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2001-1)

(1) $f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+(b+1)$.

関数 $f(x)$ が常に増加する為には.
全ての x に対し. $f'(x)\geqq 0$ である必要がある.

i) $a>0$ のとき.
$y=f'(x)$ は下に凸.
$f'(x)\geqq 0$ が成立するには. $f'(x)=0$ の判別式 D に対し. $D\leqq 0$ が成立すればよい.

$$\frac{D}{4}=(a+b)^2-2a\cdot(b+1)$$
$$=a^2-2a+b^2\leqq 0.$$

よって.
$$(a-1)^2+b^2\leqq 1.$$

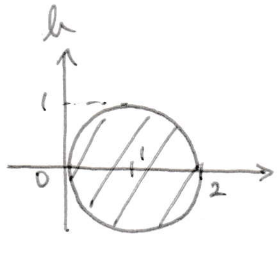
ii) $a=0$ のとき.
$f'(x)=2bx+b+1$.
$f'(x)$ がすべての x において $f'(x)\geqq 0$ をみたすのは. $b=0$ のときのみ.

よって
$$(a,b)=(0,0).$$

iii) $a<0$ のとき.
$y=f'(x)$ は上に凸であり.
すべての x について $f'(x)\geqq 0$ が成立することはない

i)〜iii)より. 求める a, b の条件は.
$$(a-1)^2+b^2\leqq 1$$

図示すると. 右上図になる.



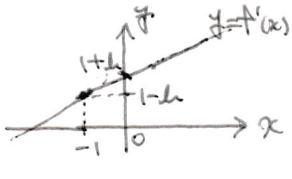
求める範囲は左図の斜線部で. 境界線を含む領域.

(2) $a=0$ のとき.
$f(x)=bx^2+(b+1)x$.
$f'(x)=2bx+b+1$.

$f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するには.
$x>-1$ で $f'(x)\geqq 0$ である必要がある.

i) $b=0$ のとき.
$f'(x)=1$
より. $f'(x)>0$ が成立.

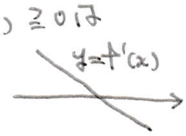
ii) $b>0$ のとき.
$f'(-1)\geqq 0$
であればよく.



$f'(-1)=-2b+b+1$
$=1-b\geqq 0$
$\therefore\ b\leqq 1.$

よって $0<b\leqq 1$ で $f'(x)\geqq 0$ が成立.

iii) $b<0$ のとき.
$x>-1$ において常に $f'(x)\geqq 0$ は成立しない.



$\therefore$ 求める条件は.
$$0\leqq b\leqq 1$$

(3)

$a=0$ のときの条件は (2) で求めた.

$a \neq 0$ のときについて考える.

$$f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b + 1$$
$$= 2a\left(x + \frac{a+b}{2a}\right)^2 - \frac{(a+b)^2 - 2a(b+1)}{2a}$$
$$= 2a\left(x + \frac{a+b}{2a}\right)^2 - \frac{a^2+b^2-2a}{2a}$$

(i) $a<0$ のとき.

放物線 $y=f'(x)$ は上に凸なので.

$x>-1$ で常に $f'(x) \geqq 0$ は成立しない.

実際に.

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty \quad \text{である.}$$

(ii) $a>0$ のとき.

放物線 $y=f'(x)$ は下に凸である.

① 軸 $x = -\dfrac{a+b}{2a} < -1$ のとき.

$f'(-1) \geqq 0$ であればよい.

$$f'(-1) = -b+1 \geqq 0.$$
$$b \leqq 1.$$

$-\dfrac{a+b}{2a} < -1$ より

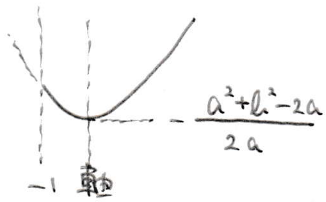
$$a+b > 2a.$$
$$b > a$$

∴求める条件は

$$0 < a < b \leqq 1.$$

② 軸 $x = -\dfrac{a+b}{2a} \geqq -1$ のとき.

i.e. $b \leqq a$ のとき.



$f'\left(-\dfrac{a+b}{2a}\right) \geqq 0$ であればよい.

$$f'\left(-\frac{a+b}{2a}\right) = -\frac{a^2+b^2-2a}{2a} \geqq 0.$$

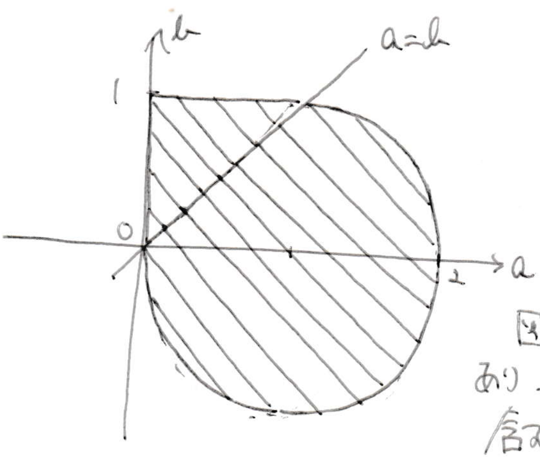
$$\therefore\ a^2+b^2-2a \leqq 0.$$
$$(a-1)^2+b^2 \leqq 1.$$

∴求める条件は

$b \leqq a$ かつ $(a-1)^2+b^2 \leqq 1$.

(2), (i), (ii) より. 求める条件は.

$$\begin{cases} 0 \leqq a < b \leqq 1 \\ \text{or} \\ b \leqq a \text{ かつ } (a-1)^2+b^2 \leqq 1. \end{cases}$$



図示すると左図であり. 境界線を含む.

96 以下の問いに答えよ。

(1) e を~~自然数~~自然対数の底とし，

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

とおく。$0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ。また

$$\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

を示せ。必要であれば $e < 3$ を使ってよい。

(2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 個の小区間に等分して，各小区間を底辺，小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする。$n \to \infty$ のとき

$$n^k \left| \int_0^1 g(x)dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ。

(2001-5)

(1) 〈証明〉

$f'(x) = e^x - (1+x)$

$f''(x) = e^x - 1 > 0 \quad (0<x<1)$

∴ $y=f'(x)$ は $0<x<1$ で単調増加.

$f'(0)=0$ より. $f'(x)>0 \quad (0<x<1)$

∴ $y=f(x)$ は $0<x<1$ で単調増加.

$f(0)=0$ より. $f(x)>0 \quad (0<x<1)$

$h(x) = x^3 - f(x)$ とおく.

$h'(x) = 3x^2+x+1-e^x$

$h''(x) = 6x+1-e^x$

$h'''(x) = 6-e^x > 0 \quad (0<x<1)$

∴ $y=h''(x)$ は $0<x<1$ で単調増加.

$h''(0)=0$ より. $h''(x)>0 \quad (0<x<1)$

∴ $y=h'(x)$ は $0<x<1$ で単調増加.

$h'(0)=0$ より. $h'(x)>0 \quad (0<x<1)$

∴ $y=h(x)$ は $0<x<1$ で単調増加.

$h(x)=0$ より. $h(x)>0 \quad (0<x<1)$

よって. $x^3 - f(x) > 0 \quad (0<x<1)$

以上から. $0<x<1$ の範囲で

$0<f(x)<x^3$ が成立 ∎

前の議論より. $0<x<1$ に対し.

$0<f(x)<x^3$ が成立.

∴ $n>1$ に対し.

$0<f\left(\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{1}{n}\right)^3$ も成立.

辺々に n^2 をかけて.

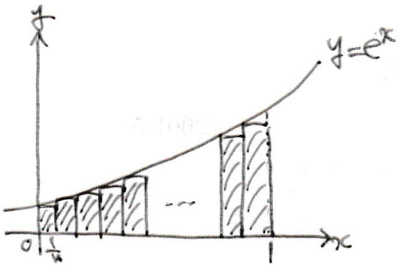
$0<n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より はさみうちの原理より.

$\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)=0$ ∎

(2)

$\int_0^1 e^x dx = e-1$.



K_nは左図の斜線部の面積である.

$$K_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\cdot e^{\frac{i}{n}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i$$

初項1, 公比$e^{\frac{1}{n}}$の等比数列の和

$$= \frac{1}{n}\left\{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^0+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^1+\cdots+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right\}.$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

ここで,(1)より,

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$e^{\frac{1}{n}}-1 = f\left(\tfrac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}$$

$$\therefore K_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{e-1}{f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}}$$

$$= \frac{e-1}{nf\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}+1}$$

よって,

$$n^k\left|\int_0^1 e^x dx - K_n\right| = n^k\left|(e-1)-\frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right|$$

$$= n^k\left|(e-1)-\frac{e-1}{nf\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}+1}\right|$$

$$= (e-1)\cdot n^k\left|\frac{nf\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}}{nf\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}+1}\right|$$

$$= (e-1)\left|\frac{n^{k+1}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}n^{k-1}}{nf\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}+1}\right|.$$

ここで,(1)より

・$\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)=0$ より,

$\lim_{n\to\infty} n f\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

・$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}=0$

であるので

$$\lim_{n\to\infty}\left(nf\left(\tfrac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}+1\right)=1.$$

また,$k=1$のとき

(分子)$= n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ $(n\to\infty)$

$k\geqq 2$のとき

$\frac{1}{2}n^{k-1}\to\infty$ $(n\to\infty)$

なので

(分子)$\to\infty$ $(n\to\infty)$

$\therefore$ $n^k\left|\int_0^1 e^x dx - K_n\right|$が有界の値に収束する最大の自然数$k$は1であり,

そのときの値は,

$\frac{1}{2}(e-1)$

//

$\boxed{97}$ n を自然数として，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく。

(1) $x<1$ において，　$f(x)=-\log(1-x)-\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$
が成り立つことを示せ。ここで，log は自然対数を表す。

(2) $|x|\leqq\dfrac{1}{3}$ とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

i. $x\geqq0$ において，$\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\leqq\frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

ii. $x<0$ において，$\left|\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\right|\leqq\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

iii. $\left|f(x)-f(-x)-\log\dfrac{1+x}{1-x}\right|\leqq\dfrac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3) この不等式を用いて，log 2 の近似値を誤差が $\dfrac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

(2000-3)

(1) 〈証明〉.

$f(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n}x^n$

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$

$=\dfrac{1-x^n}{1-x}$

$f(0)=0$ より.

$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt$

$=\int_0^x\dfrac{1-t^n}{1-t}dt$

$=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}dt-\int_0^x\dfrac{t^n}{1-t}dt$

$=\Big[-\log|1-t|\Big]_0^x-\int_0^x\dfrac{t^n}{1-t}dt$

$x<1$ より. $1-x>0$.

$\therefore\ f(x)=-\log(1-x)-\int_0^x\dfrac{t^n}{1-t}dt$ ∎

(2) 〈証明〉

(i) $|x|\leqq\frac{1}{3}$ のとき. $0\leqq t\leqq x$ をみたす t について.

$0\leqq t\leqq\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}\leqq1-t\leqq1$

$1\leqq\dfrac{1}{1-t}\leqq\dfrac{3}{2}$

$t^n\leqq\dfrac{t^n}{1-t}\leqq\dfrac{3}{2}\cdot t^n$

$\therefore\ \int_0^x\dfrac{t^n}{1-t}dt\leqq\int_0^x\dfrac{3}{2}\cdot t^n\,dt$

$=\dfrac{3}{2}\Big[\dfrac{1}{n+1}t^{n+1}\Big]_0^x$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ∎

(ii) $x<t<0$ をみたす t について.

$-\frac{1}{3}<t<0$

$1<1-t<\frac{4}{3}$

$\frac{3}{4}<\dfrac{1}{1-t}<1$

$\frac{3}{4}|t|^n<\dfrac{|t|^n}{1-t}<|t|^n$

$\therefore\ \left|\int_0^x\dfrac{t^n}{1-t}dt\right|\leqq\int_x^0\left|\dfrac{t^n}{1-t}\right|dt$

$\leqq\int_x^0|t|^n\,dt$

$=\int_x^0(-t)^n\,dt$

$=\Big[\dfrac{-1}{n+1}(-t)^{n+1}\Big]_x^0$

$=\dfrac{1}{n+1}(-x)^{n+1}$

$=\dfrac{1}{n+1}|x|^{n+1}$ ∎

(続き)

(ii) $|x| \leqq \frac{1}{3}$ より．$-x$ も $-x < 1$ をみたす．

(1) より．

・$f(x) + \log(1-x) = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

・$f(-x) + \log(1+x) = -\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}\,dt$．

$g(x) = (f(x) + \log(1-x)) - (f(-x) + \log(1+x))$

とおくと．

$|g(x)| = |g(-x)|$ である．

∴ $x \geqq 0$ に対し

$|g(x)| \leqq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$ を示せば十分．

$x \geqq 0$ のとき．

$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leqq \left|\frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}\right|$ (∵ (i))

$= \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

$\left|\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leqq \left|\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\right|$ (∵ (ii))

$= \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

∴ $\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right| + \left|\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}dt\right|$

$= \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

$\leqq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

よって．

$|g(x)| = \left|-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt + \int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}dt\right|$

$\leqq \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right| + \left|\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}dt\right|$

$\leqq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

□

(3) $x = \frac{1}{3}$ とおくと．

$\log\frac{1+x}{1-x} = \log 2$．

このとき．

$\frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)} \leqq \frac{1}{100}$

となるように n の値を決定する．

$\frac{5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)} \leqq \frac{1}{100}$

$250 \leqq 3^{n+1}\cdot(n+1)$

$n=2$ のときは (右辺) $= 27$ で不成立．

$n=3$ のときは (右辺) $= 324$ で成立．

(ii) の不等式に $n=3$．$x = \frac{1}{3}$ を代入すれば．

$\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) - \log 2\right| \leqq \frac{1}{100}$．

ここで $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

より．

$f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot 2$

$= \frac{56}{81}$

∴ $\left|\frac{56}{81} - \log 2\right| \leqq \frac{1}{100}$

求める $\log 2$ の近似値は

$\frac{56}{81}$ //

$\boxed{98}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とするとき，不等式 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。

(2015-2)

(1) 〈証明〉

$$y'=\frac{-\left(x(\log x)^2\right)'}{\left(x(\log x)^2\right)^2}$$

$$=-\frac{(\log x)^2+x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}}{x^2(\log x)^4}$$

$$=-\frac{\log x(\log x+2)}{x^2(\log x)^4}$$

$x>1$ のとき $\log x>0$ より

$y'<0$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ で

単調減少 ■

(2) C：積分定数とする．

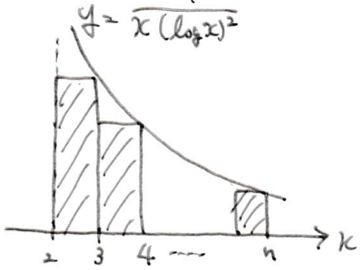
$$\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\int(\log x)^{-2}\cdot(\log x)'dx$$

$$=-1\cdot(\log x)^{-1}+C$$

$$=-\frac{1}{\log x}$$

//

(3) 〈証明〉



斜線部の面積を S とする．

$S=\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}$ であり．

本図より．

$$S<\int_2^n y\,dx.$$

$$\Longleftrightarrow\ \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\int_2^n\frac{1}{x(\log x)^2}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{\log x}\right]_2^n$$

$$=-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{\log 2}$$

$$<\frac{1}{\log 2}$$

■

99 n を自然数とする。x, y が全ての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

の最小値を I_n とおく。極限 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

(2019-1)

〈解答〉.

$$(\sin(2n\pi t) - xt - y)^2$$
$$= \sin^2(2n\pi t) - 2(xt+y)\sin(2n\pi t) + (xt+y)^2$$

さて,

・ $$\int_0^1 \sin^2(2n\pi t)\,dt = \int_0^1 \frac{1-\cos(4n\pi t)}{2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{4n\pi}\sin(4n\pi t)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}.$$

・ $$\int_0^1 (xt+y)\sin(2n\pi t)\,dt$$
$$= \left[-\frac{xt+y}{2n\pi}\cos 2n\pi t\right]_0^1 + \int_0^1 x\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi t\,dt$$
$$= \left[-\frac{xt+y}{2n\pi}\cos 2n\pi t\right]_0^1$$
$$= \frac{y}{2n\pi} - \frac{x+y}{2n\pi} = \frac{-x}{2n\pi}$$

・ $x \neq 0$ で

$$\int_0^1 (xt+y)^2 dt = \left[\frac{1}{3x}(xt+y)^3\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3x}\left\{(x+y)^3 - y^3\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(x^2+3xy+3y^2)$$

これは $x=0$ でも成立.

$$\therefore \int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$
$$= \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{-x}{2n\pi} + \frac{1}{3}(x^2+3xy+3y^2)$$
$$= y^2 + xy + \frac{1}{3}x^2 + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2}$$
$$= \left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2}$$
$$= \left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{(n\pi)^2}$$

$\therefore$ $x = -\frac{6}{n\pi}$, $y = -\frac{1}{2}x = \frac{3}{n\pi}$ で

$$I_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{(n\pi)^2}$$

であり,

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2} \quad //$$

$\boxed{100}$ m を 2 以上の自然数，e を自然対数の底とする。

(1) 方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ を満たす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ。また，その値を c とするとき，$m-1 < c < m$ となることを示せ。

(2) $x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ。

(3) a_m を (2) で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{\cancel{n}\,m\to\infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ。

(1999-1)

(1) ＜証明＞.

$g(x) = xe^x - me^x + m$ とおく.

$$g'(x) = e^x + xe^x - me^x$$
$$= e^x(x - m + 1)$$

$g(0) = 0$.

$g(m) = m > 0$. より

x	0	$\cdots$	$m-1$	$\cdots$	m	$\cdots$
g'	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$
g	0	↘	極小	↗	m	↗

増減表から. $g(x) = 0$ をみたす正の実数 x は唯一つである.

$g(m-1) < 0$, $g(m) > 0$ より. その値 c は

$m-1 < c < m$

となる. ■

(2) ＜証明＞.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^m}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^m - (e^x - 1)\cdot m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$= \frac{xe^x - me^x + m}{x^{m+1}}$$

$$= \frac{g(x)}{x^{m+1}}$$

増減表は以下である. ($x>0$ で $x^m>0$ より).

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
g'	/	$-$	0	$+$
g	/	↘	極小	↗

よって, $f(x)$ は $x=c$ で極小値かつ最小値をとる. ■

(3)

$$a_m = f(c)$$
$$= \frac{e^c - 1}{c^m} \quad \text{である.}$$

ここで. (1) より $g(c) = 0$ より.

$$ce^c - me^c + m = 0$$
$$ce^c - m(e^c - 1) = 0$$
$$e^c - 1 = \frac{ce^c}{m}$$

$$\therefore\ a_m = \frac{ce^c}{mc^m}$$
$$= \frac{e^c}{m\,c^{m-1}}$$

対数をとると.

$$\log a_m = \log e^c - \log m\,c^{m-1}$$
$$= c - \log m - (m-1)\log c.$$

$$\therefore\ \frac{\log a_m}{m \log m} = \frac{c - \log m - (m-1)\log c}{m \log m}$$

$$= \frac{c}{m \log m} - \frac{1}{m} - \frac{m-1}{m}\cdot\frac{\log c}{\log m}$$

さて. $m-1 < c < m$ より.

$$\frac{m-1}{m} < \frac{c}{m} < 1 \text{ . より } \lim_{m\to\infty} \frac{c}{m} = 1 \text{ .}$$

$\log(m-1) < \log c < \log m$ より

$$\frac{\log(m-1)}{\log m} < \frac{\log c}{\log m} < 1$$

$$\frac{\log(m-1)}{\log m} = \frac{\log m\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\log m}$$

$$= 1 + \frac{\log\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\log m} \text{ より}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log(m-1)}{\log m} = 1 \text{ .}$$

はさみうちの原理より.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log c}{\log m} = 1 \text{ .}$$

以上より.

・ $\lim_{m\to\infty} \frac{c}{m \log m} = \lim_{m\to\infty} \frac{c}{m} \cdot \frac{1}{\log m} = 0$.

・ $\lim_{m\to\infty} \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\log c}{\log m} = 1 \cdot 1 = 1$.

よって.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log a_m}{m \log m} = -1 \text{ .}$$

//