101 以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x) = e^x f(x)$ とおく。e は自然対数の底である。

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で条件 (A)
「すべての x に対して $f(x+1) = f(x)$ である」
を満たすものの例をあげよ。

(2) 関数 $f(x)$ が条件 (B)
「すべての x に対して $f'(x) + f(x) \leqq 0$ である」
を満たすとき，$a < b$ ならば $F(a) \geqq F(b)$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が (1) の条件 (A) を満たすとき，$F(x+n)$(ただし，n は正の整数) を $F(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $f(x)$ が (1),(2) の条件 (A), (B) をともに満たすとする。

i. $f(c) \geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c) = 0$ であることを示せ。

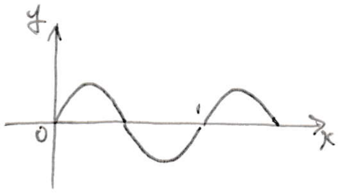
ii. ある c で $f(c) = 0$ であれば，すべての x で $f(x) = 0$ となることを示せ。

(1998-1)

(1)

$f(x) = \sin 2\pi x$

が条件(A)をみたす1つの例。



実際に，

$f(x+1) = \sin 2\pi(x+1)$

$= \sin(2\pi x + 2\pi)$

$= \sin 2\pi x = f(x)$ である //

(2) <証明>.

$F'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$

$= e^x(f(x) + f'(x))$.

すべての x に対し，$e^x > 0$ であり，

条件(B)より $f(x) + f'(x) \leqq 0$ なので

$F'(x) \leqq 0$.

∴ 関数 $F(x)$ は単調減少.

∴ $a < b$ に対し $F(a) \geqq F(b)$. ■

(3) $F(x+n) = e^{x+n} f(x+n)$

$= e^n \cdot e^x \cdot f(x+n)$

$= e^n \cdot e^x \cdot f(x)$ (∵条件(A))

$= e^n \cdot F(x)$ より

$F(x+n) = e^n \cdot F(x)$ //

(4) i. <証明>

まず，$f(c) \geqq 0$ なる c をとる.

(2)より，$F(c) \geqq F(c+1)$. である. …①

ここで，(3)より

$F(c+1) = e F(c)$.

なので，

$F(c+1) \geqq F(c)$. …②

①,②より，

$F(c) = F(c+1)$.

また，$F(c+1) = e^{c+1} f(c+1) = e^{c+1} f(c)$

$F(c) = e^c f(c)$

∴ $e^{c+1} f(c) = e^c f(c)$

$f(c)(e^{c+1} - e^c) = 0$

$e^{c+1} - e^c \neq 0$ より $f(c) = 0$ ■

ii. <証明>.

任意の x に対し，

$c+n \leqq x \leqq c+n+1$

となるように整数 n をとる.

(2)より

$F(c+n) \geqq F(x) \geqq F(c+n+1)$

$\Leftrightarrow$ $c^n F(c) \geqq F(x) \geqq c^{n+1} F(c)$

$\Leftrightarrow$ $c^n \cdot e^c \cdot f(c) \geqq e^x f(x) \geqq c^{n+1} \cdot e^c \cdot f(c)$

$f(c) = 0$ より.

$e^x f(x) = 0$

$e^x \neq 0$ より. $f(x) = 0$ ■

102 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x = r(t)\cos t,\ y = r(t)\sin t$ で与えられている。ただし，$r(t) = 1 + \cos t$ であるとする。

(1) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で，点Pの速さ（速度の大きさ）が1となる時刻を求めよ。

(2) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の間に，点Pが動いた道のりを求めよ。

(3) 点Pが $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で描く曲線と x 軸，y 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

(1997-1)

(1)

$$\frac{dx}{dt} = r'(t)\cos t + r(t)\sin t.$$

$$\frac{dy}{dt} = r'(t)\cdot\sin t - r(t)\cos t.$$ より．

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}$$

$$= \sqrt{(\sin t)^2 + (1+\cos t)^2}$$

$$= \sqrt{2(1+\cos t)}$$

$$= 2\left|\cos\frac{t}{2}\right|$$ であるので．

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ で $|v| = 1$ となるのは．

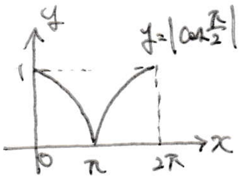
$\frac{t}{2} = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$ のとき

i.e. $t = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ のとき //

(2)

$$(\text{道のり}) = \int_0^{2\pi}(\text{速さ})\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cdot\left|\cos\frac{t}{2}\right| dt$$



$$= 2\cdot 2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 4\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= 8$$ //

(3)

$$\frac{dx}{dt} = r'(t)\cos t + r(t)\sin t$$

$$= -\sin t(1+2\cos t)$$

より．$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ で $\frac{dx}{dt} \leqq 0$．∴ $x(t)$ は単調減少．

t	$0 \to \frac{\pi}{2}$
x	$2 \to 0$

求める面積を S とおくと

$$S = \int_0^2 y\,dx.$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\cos t)\sin t\cdot\{-\sin t(1+2\cos t)\}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,(1+\cos t)(1+2\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)(1+\cos t)(1+2\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\cos t+\cos^2 t-3\cos^3 t-2\cos^4 t)\,dt$$

ここで．

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)(\sin t)'\,dt = \left[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)^2\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right)dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

より．

$$S = \frac{\pi}{2} + 3 + \frac{\pi}{4} - 3\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 1 + \frac{3}{8}\pi$$ //

103 m を~~せい~~正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x),\ v(x),\ f(x),\ g(x)$ を

$$u(x) = \int_0^x S(t)dt + m,\quad v(x) = \int_0^x tS(t)dt + m,$$

$$f(x) = \frac{v(x)}{u(x)},\quad g(x) = v(x) - xu(x)$$

とおく。

(1) $g(0) > 0,\ g(1) < 0$ および $x > 0$ において $g'(x) < 0$ を示せ。

(2) $f(x) = x$ を満たす x の値がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) $f(x) = x$ を満たす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ。

(1997-2)

(1)〈証明〉.

$v(0)=m$.
$u(0)=m$ より.

$$g(0) = m - 0\cdot m = m > 0$$

また.

$$g(1) = v(1) - u(1)$$
$$= \int_0^1 tS(t)\,dt - \int_0^1 S(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 (t-1)S(t)\,dt$$

ここで. $0<t<1$ で $t-1<0$. であり.
$S(t)$ は常に正の値をとるので

$(t-1)S(t) < 0$. $(0<t<1)$

$\therefore$ $\int_0^1 (t-1)S(t)\,dt < 0$.

$\therefore$ $g(1) < 0$.

$$g'(x) = v'(x) - u(x) - xu'(x)$$
$$= xS(x) - u(x) - x\cdot S(x)$$
$$= -u(x) < 0$$

$\therefore$ $x>0$ で $g'(x) < 0$. ■

(2)〈証明〉.

$f(x) = x \iff \dfrac{v(x)}{u(x)} = x$

$\iff v(x) = xu(x)$

$\iff g(x) = 0$.

つまり. $g(x)=0$ をみたす x が唯一つ存在することを言えばよい.

(1)より.

$g(0)>0$, $g(1)<0$ なので.

$g(x)=0$ の解の1つは $0<x<1$ に存在する.

また、$g'(x)<0$ なので $g(x)$ は単調減少であり.

$g(1)<0$ なので. $g(x)=0$ は $1<x$ の範囲に解をもたない.

$\therefore$ $g(x)$ は $0<x<1$ に唯一つの解をもつ. ■

(3)〈証明〉.

$$f'(x) = \frac{v'(x)u(x) - v(x)\cdot u'(x)}{(u(x))^2}$$

$$= \frac{xS(x)u(x) - v(x)S(x)}{(u(x))^2}$$

$$= \frac{-S(x)g(x)}{(u(x))^2}$$

$S(x)>0$ より. $x=a$ のときに $g(x)=0$ であり.
そのときに限り $f'(x)=0$. $g(x)$:単調減少より.

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
f'	/	$-$	0	$+$
f	/	↘	極小	↗

増減表は左図となり 表から.
$x=a$ で $f(x)$ は最小値をとる.

$f(a)=a$ より

$f(x)$ の最小値は a. //

104 自然数 $n>1$ に対して $a_n=\log[(n-1)!]+\dfrac{1}{2}\log n$ とする。次の問いに答えよ。

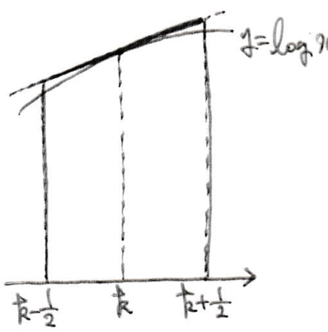
(1) 曲線 $y=\log x$ 上の点 $(k,\ \log k)$ における接線と 2 直線 $x=k-\dfrac{1}{2}$ と $x=k+\dfrac{1}{2}$，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし $k\geqq 2$ とする。

(2) $\log[(n-1)!]>\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\log\left(n-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\log\left(\dfrac{3}{2}\right)-(n-2)$ を示せ。

(3) $a_n>n\log n-n+\dfrac{3}{2}\left[1-\log\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$ を示せ。

(1996-3)

(1)



$y=\log x$

$y'=\dfrac{1}{x}$

∴点 $(k, \log k)$ における

$y=\log x$ の接線は.

$y-\log k=\dfrac{1}{k}(x-k)$

$y=\dfrac{1}{k}x+\log k-1$

∴求める面積 S_k は

$S_k=\dfrac{1}{2}\times\left\{\left(\dfrac{1}{k}\left(k-\dfrac{1}{2}\right)+\log k-1\right)+\left(\dfrac{1}{k}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)+\log k-1\right)\right\}$

$=\log k$.

∴ $\underline{S_k=\log k}$ //

(2) 〈証明〉.

(1)の図から.

$S_k<\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$

が成立する.

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}S_k<\sum_{k=2}^{n-1}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$

$=\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\log x\,dx$

$=\Big[x(\log x-1)\Big]_{\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$

$=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\left\{\log\left(n-\dfrac{1}{2}\right)-1\right\}-\dfrac{3}{2}\left\{\log\dfrac{3}{2}-1\right\}$

$=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\log\left(n-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\log\dfrac{3}{2}-n+2$

ここで、(左辺) $=\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}S_k$

$=\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\log k$

$=\log(n-1)+\cdots+\log 2$

$=\log(n-1)+\cdots+\log 2+\log 1$

$=\log[(n-1)!]$

∴ $\log[(n-1)!]>\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\log\left(n-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\log\dfrac{3}{2}-(n-2)$

□

(3) 〈証明〉.

$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx=\Big[x(\log x-1)\Big]_{\frac{3}{2}}^{n}$

$=n\log n-n-\dfrac{3}{2}\left(\log\dfrac{3}{2}-1\right)$.

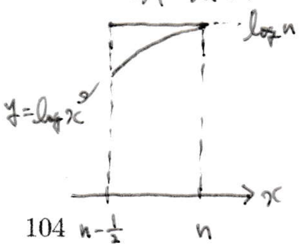
ここで、

$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx=\underbrace{\int_{\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\log x\,dx}_{\cdots①}+\underbrace{\int_{n-\frac{1}{2}}^{n}\log x\,dx}_{\cdots②}$

① について. (2)より

$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\log x\,dx<\log[(n-1)!]$

② について.



左図より

$\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n}\log x\,dx<\dfrac{1}{2}\cdot\log n$.

まとめると.

$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<\log[(n-1)!]+\dfrac{1}{2}\log n$

$=a_n$

□

105 m, n を正の整数とし，a, b, c を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 次の定積分の値を求めよ。

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin mx \, dx$

(2) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x - x)^2 dx$ とおく。I を最小にするような a, b, c の値と I の最小値を求めよ。

(1994-4)

(1)

(i)

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

より．

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\therefore \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\} dx$$

① $m \neq n$ のとき．

$$(与式) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_0^{\pi}$$
$$= 0$$

② $m = n$ のとき．

$$(与式) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2mx)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\pi$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{1}{2}\pi & (m = n) \end{cases}$$

//

(ii)

$$\int_0^{\pi} x \sin mx \, dx$$
$$= \left[-x \cdot \frac{1}{m}\cos mx\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{1}{m}\cos mx \, dx}_{周期性より0}$$
$$= -\frac{\pi}{m} \cdot \cos m\pi.$$

//

(2)

$$(a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x - x)^2$$
$$= a^2\sin^2 x + b^2\sin^2 2x + c^2\sin^2 3x + x^2$$
$$+ 2(ab\sin x\sin 2x + bc\sin 2x\sin 3x + ac\sin x\sin 3x - ax\sin x - bx\sin 2x - cx\sin 3x)$$

より．(1) の結果を用いて．

$$\int_0^{\pi} (a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x - x)^2 dx$$
$$= (a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{1}{2}\pi + \int_0^{\pi} x^2 dx$$
$$+ 2\left(+a\pi\cos\pi + b\cdot\frac{\pi}{2}\cos 2\pi + c\cdot\frac{\pi}{3}\cos 3\pi\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{3}\pi^3 + 2\left(-a\pi + \frac{1}{2}b\pi - \frac{1}{3}c\pi\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}(a-2)^2 + \frac{\pi}{2}(b-1)^2 + \frac{\pi}{2}\left(c-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{49}{18}\pi.$$

$(a-2)^2$, $(b-1)^2$, $\left(c-\frac{2}{3}\right)^2 \geqq 0$ より．

$a=2$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$ のとき．I は最小値をとり．

その値は $\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{49}{18}\pi$

//

$\boxed{106}$ 曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $(a,\ f(a))$ における法線は点 $(0,\ cf(a))$ を通るものとする。ただし，c は $c \neq 1$ を満たす定数である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) この曲線は微分方程式 $(c-1)y\dfrac{dy}{dx}=x$ を満たすことを証明せよ。

(2) (1) の微分方程式を満たす曲線が $(0,\ 1)$ を通るとき，その曲線の方程式を求め，その図をかけ。

(3) $c<1$ のとき，(2) で得た曲線を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積が π となるように c を定めよ。

(1992-3)

(1) 〈証明〉.

法線の方程式は.

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$f'(a)(y-f(a))=-(x-a)$$

法線が $(0,\ cf(a))$ を通るので

$$f'(a)(cf(a)-f(a))=a.$$

$$(c-1)f(a)\cdot f'(a)=a.$$

これが $y=f(x)$ 上の任意の点 $(a.\ f(a))$ で成立するので.

$$(c-1)y\cdot\frac{dy}{dx}=x$$

も成立

□

(2) k: 積分定数 とする.

(1) の結果より.

$$\int(c-1)y\,dy=\int x\,dx.$$

$$\frac{1}{2}(c-1)y^2=\frac{1}{2}x^2+k.$$

$$(c-1)y^2=x^2+k.$$

(0.1) を通るので

$$(c-1)=k$$

∴ 求める方程式は

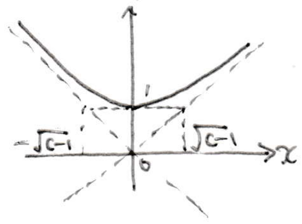
$$(c-1)y^2=x^2+(c-1) \quad (y \geqq 0)$$ //

式変形すると.

$$y^2-\frac{1}{c-1}x^2=1.$$

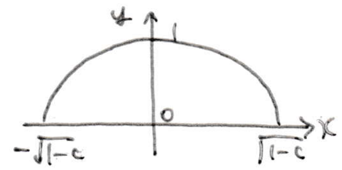
(i) $c-1>0$ のとき.

求める曲線は双曲線の一部.

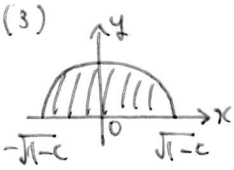


(ii) $c-1<0$ のとき.

求める曲線は楕円の一部.



(3)



求める体積は左図の斜線部を x 軸まわりに回転させてできるもの.

$$V=\int_{-\sqrt{1-c}}^{\sqrt{1-c}}\pi y^2\,dx$$

$$=2\cdot\pi\int_0^{\sqrt{1-c}}y^2\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{1-c}}\left(1-\frac{1}{1-c}x^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[x-\frac{1}{3(1-c)}x^3\right]_0^{\sqrt{1-c}}$$

$$=2\pi\cdot\frac{2}{3}\sqrt{1-c}$$

$V=\pi$ より

$$\pi\cdot\frac{4}{3}\sqrt{1-c}=\pi \iff \frac{4}{3}\sqrt{1-c}=1$$

$$\Rightarrow 1-c=\frac{9}{16}$$

$$\iff c=\frac{7}{16}$$

これは $c<1$ をみたす.　∴ $c=\frac{7}{16}$ //

107 数直線上を，時刻 $t=0$ に原点 O を出発して，次の速度 $v(t)$ で運動している点 P がある。

$v(t) = t-3 \quad (0 \leqq t \leqq 8 \text{ のとき})$
$v(t) = 5e^{8-t} \quad (t \geqq 8 \text{ のとき})$

(1) P が最も左にくるときの時刻と，その位置を求めよ。

(2) 時刻 t における P の位置を $p(t)$ とするとき，$\lim_{t\to\infty} p(t)$ を求めよ。

(1990-5)

(1)

$$v(t) = \begin{cases} t-3 & (0 \leqq t \leqq 8) \\ 5\cdot e^{8-t} & (t \geqq 8) \end{cases}$$

で，$e^{8-t} > 0$ より．

速度が負の値をとるのは，$0 \leqq t \leqq 3$ のときのみである．

∴ 点 P が最も左にくるのは，$t=3$ のときである．

そのときの位置 $p(3)$ は．

$$p(3) = \int_0^3 (t-3)\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t\right]_0^3$$
$$= -\frac{9}{2}$$

//

(2) $t>8$ のとき．点 P の位置は．

$$p(t) = \int_0^8 (t-3)\,dt + \int_8^t 5\cdot e^{8-t}\,dt.$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t\right]_0^8 + \left[-5e^{8-t}\right]_8^t$$
$$= 13 - 5\cdot e^{8-t}$$
$$= 13 - \frac{5\cdot e^8}{e^t}$$

$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$ より．

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty}\left(13 - \frac{5\cdot e^8}{e^t}\right)$$
$$= 13$$

//

簡単。

108 関数 $f(x)$ は，$f(x)=\int_0^x f(t)(f(t)-1)dt+\frac{1}{3}$ を満たすものとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ の凹凸および変曲点を調べ，概形を描け。

(1989-1)

(1)

$f(x)=\int_0^x f(t)(f(t)-1)\,dt+\frac{1}{3}$ より

$f'(x)=f(x)(f(x)-1)$.

ここで．$y=f(x)$ とおくと．

$\frac{dy}{dx}=y(y-1)$.

$\therefore\ \int\frac{1}{y(y-1)}dy=\int 1\cdot dx$.

$\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right)dy=\int 1\cdot dx$.

$\int\frac{1}{y-1}dy-\int\frac{1}{y}dy=x+C$. ($C$:積分定数)

$\log|y-1|-\log|y|=x+C$.

$\log\left|\frac{y-1}{y}\right|=x+C$.

$\frac{y-1}{y}=A\cdot e^x\quad(A=\pm e^C)$

$1-\frac{1}{y}=A\cdot e^x$

$\therefore\ y=\frac{1}{1-A\cdot e^x}$

ここで，$f(0)=\frac{1}{3}$ より．

$f(0)=\frac{1}{1-A\cdot e^0}=\frac{1}{1-A}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ A=-2$.

よって．$f(x)=\frac{1}{1+2e^x}$

(2) (1)より $f(x)=\frac{1}{1+2e^x}$

$f'(x)=\frac{-2e^x}{(1+2e^x)^2}<0$.

$f''(x)=\frac{-2e^x\cdot(1+2e^x)^2+2e^x\cdot 2\cdot 2e^x(1+2e^x)}{(1+2e^x)^4}$

$=\frac{2e^x(2e^x-1)}{(1+2e^x)^3}$

$x=\log\frac{1}{2}$ のとき $f''(x)=0$ となる．

増減表は．

x	$\cdots$	$\log\frac{1}{2}$	$\cdots$
f'	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$
f	↘	$\frac{1}{2}$	↘

増減表より．

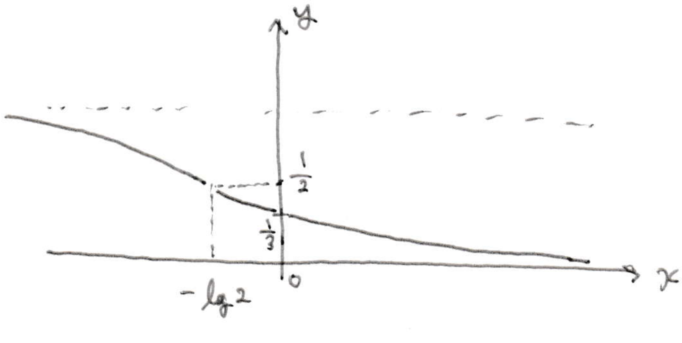
$x<\log\frac{1}{2}$ で $y=f(x)$ は上に凸．

$x>\log\frac{1}{2}$ で $y=f(x)$ は下に凸．

変曲点は $\left(\log\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

グラフの概形は．

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ から．



109 関数 $f(x) = \cancel{-\sin x}$ $x-\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$ を考える。曲線 $y = f(x)$ の接線で傾きが $\frac{1}{2}$ となるものを l とする。

(1) l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) a は (1) で求めたものとする。曲線 $y = f(x)$，直線 $x = a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(2014-1)

(1)

$f(x) = x - \sin x$.

$f'(x) = 1 - \cos x$. より.

$y = f(x)$ の接線で傾きが $\frac{1}{2}$ となる x の値は.

$1 - \cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ より $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ から.

$x = \frac{\pi}{3}$

∴ l の方程式は

$y - f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})$

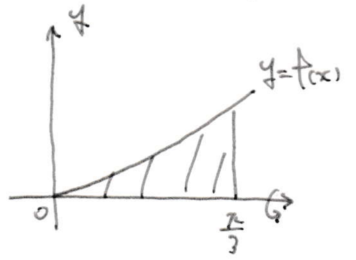
$y = \frac{1}{2}x + (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ //

また. 接点の座標は.

$(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3})) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$ //

(2) (1)より $a = \frac{\pi}{3}$.



求める体積Vは. 左図の斜線部を x 軸まわりに回転させたものである.

$V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi \cdot y^2\, dx$

$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - \sin x)^2 dx$

$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x^2 - 2x\sin x + \sin^2 x)\, dx$

ここで.

・ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{81}\pi^3$

・ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x\, dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx$

$= \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

・ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$

$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

より.

$V = \pi\left\{\frac{1}{81}\pi^3 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}$

$= \pi\left(\frac{1}{81}\pi^3 + \frac{1}{2}\pi - \frac{9}{8}\sqrt{3}\right)$ //

$\boxed{110}$ $a>1$とし，2つの曲線

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \quad (x \geqq 0) \\ y=\dfrac{a^3}{x} \quad (x>0) \end{cases}$$

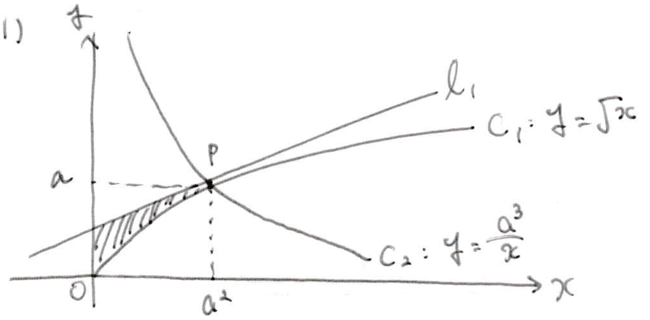
を順にC_1，C_2とする。また，C_1とC_2の交点PにおけるC_1の接線をl_1とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線C_1とy軸および直線l_1で囲まれた部分の面積をaを用いて表せ。

(2) 点PにおけるC_2の接線と直線l_1のなす角を$\theta(a)$とする$\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$を求めよ。

(2013-1)

(1)



C_1とC_2の$x>0$における共有点は

$\sqrt{x} = \dfrac{a^3}{x}$

$x\sqrt{x} = a^3$.

で．$x>0$．$a>0$より

$x = a^2$

このときのy座標は $y=\sqrt{a^2}=a$.

∴ $P(a^2, a)$

さて．l_1の方程式を求める．

$y=\sqrt{x}$ において．

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$x=a^2$のとき

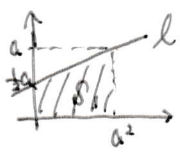
$\frac{1}{2}(a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}$

なので．

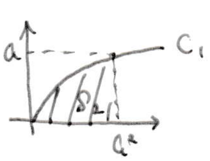
$l_1: y-a = \dfrac{1}{2a}(x-a^2)$

$y = \dfrac{1}{2a}x + \dfrac{1}{2}a$.

S =



−



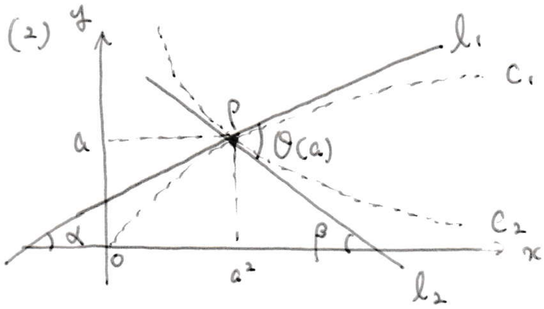
$S_1 = \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\left(a+\frac{1}{2}a\right)$

$= \frac{3}{4}a^3$.

$S_2 = \displaystyle\int_0^{a^2}\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2} = \frac{2}{3}a^3$.

∴ $S = \frac{3}{4}a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{12}a^3$ //

(2)



l_1とx軸のなす角をα $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$.

l_2とx軸のなす角をβ $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく.

$\theta=\alpha+\beta$とおく.

$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$のとき. $\theta(a)=\theta$.

$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$のとき. $\theta(a)=\pi-\theta$

ここで.

$\sin\theta = \sin(\pi-\theta)$

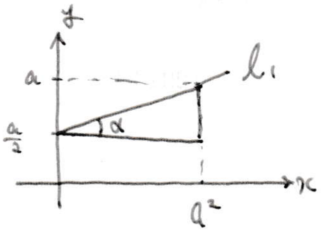
なので

$\sin\theta(a) = \sin(\alpha+\beta)$ として考えることができる.

$\sin\theta(a) = \sin(\alpha+\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

ここで、



$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{a^4 + \frac{1}{4}a^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + \frac{1}{4}a^2}}$$

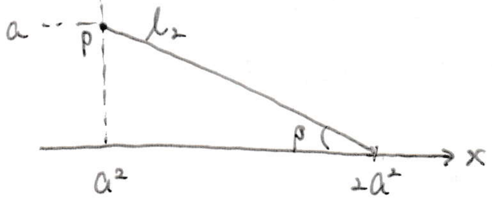
また、l_2の方程式は

$$y = \frac{a^3}{x}$$

$$y' = -\frac{a^3}{x^2} \quad \text{より.}$$

$$y - a = -a^3 \cdot \frac{1}{(a^2)^2}(x - a^2)$$

$$y = -\frac{1}{a}x + 2a.$$



$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^4 + a^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + a^2}}$$

$$\therefore \sin\theta(a) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= \frac{a+2a}{\sqrt{(4a^2+1)(1+a^2)}}$$

$$= \frac{3a}{\sqrt{(4a^2+1)(a^2+1)}}$$

//

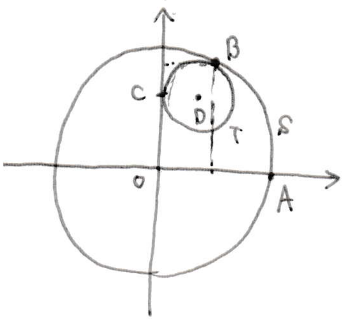
111 原点Oを中心とし，点 $A(0,\ 1)$ を通る円をSとする。点 $B(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$ で円Sに内接する円Tが，点Cでy軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円Tの中心Dの座標と半径を求めよ。

(2) 点Dを通り x 軸に平行な直線 l とする。円Sの短い方の弧 $\overset{\frown}{AB}$，円Tの短い方の弧 $\overset{\frown}{BC}$，および線分ACで囲まれた図形を l のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

(2013-4)

(1)



円Tが円Sに内接より，

$OD+DB=OB\ (=1)$ …①

であるので，点Dは直線OB上にある。

ここで，直線OBの方程式は，

$y=\sqrt{3}x$.

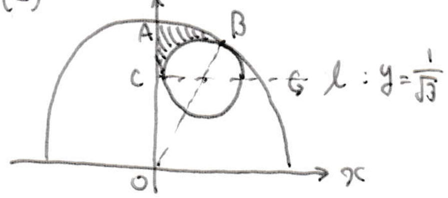
∴点Dの座標は $(a,\ \sqrt{3}a)$ と表すことができる。

①より，

$2a+a=1$. $a=\frac{1}{3}$.

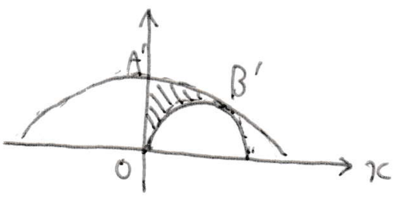
∴ $D:(\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3})$，半径 $\frac{1}{3}$ //

(2)



求める体積は，上図の斜線部を l まわりに回転させてできたものである。

ここで，直線 l が x 軸に重なるように図全体を平行移動する。



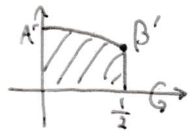
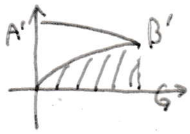
円S，Tに対応するものを S'，T' とおき，点A，Bに対応するものを A'，B' とおく。

円 S' : $x^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{3})^2=1$.

円 T' : $(x-\frac{1}{3})^2+y^2=(\frac{1}{3})^2$.

$A'(0,\ 1+\frac{1}{\sqrt{3}})$，$B'(\frac{1}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{6})$ である。

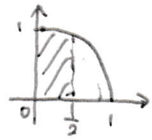
求める体積は

$V=$  $-$ 

$=V_1-V_2$ とおく。

$$V_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-x^2}\right)dx.$$

$$=\pi\left[\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi\ .$$ 

$$=\frac{5}{8}\pi-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$=\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$$

$$V^2=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-x^2+\frac{2}{3}x\right)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

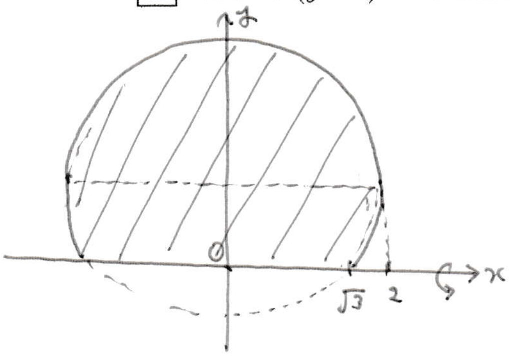
$$=\frac{1}{3}\pi\left[x^2(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{24}\pi$$

$$\therefore V=V_1-V_2$$

$$=\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$$ //

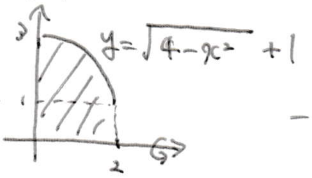
112 円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

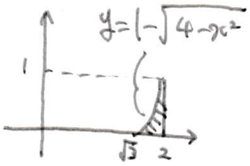
(2012-1)



求める体積 V は、上図の斜線部を x 軸まわりに回転させたものである。

対称性から、

$\frac{1}{2}V =$ 

$-$ 

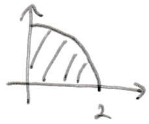
$= V_1 - V_2$ とおく。

$$V_1 = \int_0^2 \pi y^2\,dx$$

$$= \int_0^2 \pi\left(\sqrt{4-x^2}+1\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^2\left(5-x^2+2\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

$$= \pi\left[5x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + 2\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$= \pi\cdot\frac{22}{3} + 2\pi$ 

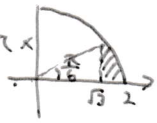
$$= \frac{22}{3}\pi + 2\pi^2.$$

$$V_2 = \int_{\sqrt{3}}^2 \pi y^2\,dx$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^2 \pi\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_{\sqrt{3}}^2\left(5-x^2-2\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

$$= \pi\left[5x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{3}}^2 - 2\pi\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$= \frac{22}{3}\pi - 4\sqrt{3}\pi - 2\pi\times$ 

$$= \frac{22}{3}\pi - 4\sqrt{3}\pi - 2\pi\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

$$= \frac{22}{3}\pi - 3\sqrt{3}\pi - \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$\therefore \frac{1}{2}V = \left(\frac{22}{3}\pi + 2\pi^2\right) - \left(\frac{22}{3}\pi - 3\sqrt{3}\pi - \frac{2}{3}\pi^2\right)$$

$$= 3\sqrt{3}\pi + \frac{8}{3}\pi^2$$

$$\therefore V = \frac{16}{3}\pi^2 + 6\sqrt{3}\pi$$ //

113 実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) この方程式が実数解を持つような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2) この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ。

(2012-3)

(1)

(i) $a=0$ のとき.

(左辺) $=0$

(右辺) $=\sqrt{n}(x+1)$

∴ 与えられた方程式は $x=-1$ を解にもつ.

(ii) $a\neq 0$ のとき.

$x=-1$ を代入すると,

(左辺) $=na\neq 0$.

(右辺) $=0$

より, 与えられた方程式は $x=-1$ を解にもたない.

∴ $x+1\neq 0$.

よって, 与えられた方程式は以下のように変形できる.

$$\frac{x^2+|x+1|+n-1}{(x+1)}=\frac{\sqrt{n}}{a}\quad\cdots(*)$$

(左辺) $=f(x)$ とおく.

(*) の実数解は, $y=f(x)$ と $y=\frac{\sqrt{n}}{a}$ の共有点の x 座標である.

$$|x+1|=\begin{cases}x+1 & (x+1>0)\\ (x+1) & (x+1<0)\end{cases}$$

より,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+n}{x+1} & (x>-1)\\[2mm] \dfrac{x^2-x+n-2}{x+1} & (x<-1)\end{cases}$$

① $x>-1$ のとき.

$$f(x)=x+\frac{n}{x+1}$$

$$f'(x)=1+\frac{-n}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2-n}{(x+1)^2}$$

∴ $x=-1\pm\sqrt{n}$ で $f'(x)=0$ となる.

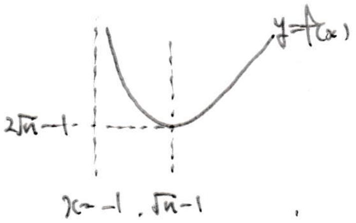
$x>-1$ より,

x	-1	$\cdots$	$-1+\sqrt{n}$	$\cdots$
f'	/	$-$	0	$+$
f	/	↘	$2\sqrt{n}-1$	↗

極小

また, $\displaystyle\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\left(x+\frac{n}{x+1}\right)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. となので, グラフは左図となる.



図から, (*) が実数解をもつには

$2\sqrt{n}-1\leq\frac{\sqrt{n}}{a}$ をみたすとき.

∴ $0<a\leq\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$

② $x<-1$ のとき.

$$f(x)=\frac{(x^2+x)-2(x+1)+n}{x+1}=x-2+\frac{n}{x+1}$$

$$f'(x)=1+\frac{-n}{(x+1)^2}$$

∴ $x<-1$ で $f'(x)=0$ となるのは, $x=-1-\sqrt{n}$ のとき.

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{n}$	$\cdots$	-1
f'	$+$	0	$-$	/
f	↗	$-2\sqrt{n}-3$	↘	/

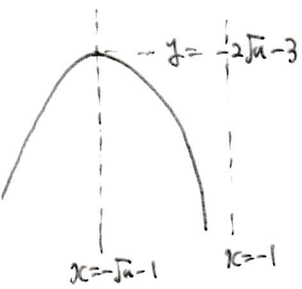
極大.

また, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(x-2+\frac{n}{x+1}\right)=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)=-\infty$

グラフは次ページ.

(続き)



左図より，(*)が実数解をもつには，

$$\frac{\sqrt{n}}{a} \leqq -2\sqrt{n}-3$$

をみたすときである．

$$\therefore\ 0 > a \geqq -\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}$$

ホ1，ホ1−①，②より，
与えられた方程式が実数解をもつような a の範囲は，

$$-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

//

(2)
(1)の結果から，
すべての自然数 n に対し，

$$-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

をみたす a の範囲を求めればよい．
n：自然数より，$1 \leqq n$ であるので

$$0 < \frac{1}{n} \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow\ 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow\ 0 < \frac{3}{\sqrt{n}} \leqq 3$$

$$\Leftrightarrow\ 2 < \frac{3}{\sqrt{n}}+2 \leqq 5$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{5} \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} < \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ -\frac{1}{2} < -\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq -\frac{1}{5}$$

同様に，

$$0 < \frac{1}{n} \leqq 1.$$

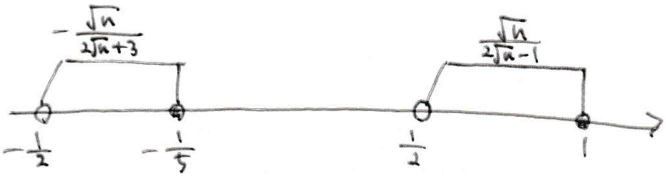
$$\Leftrightarrow\ 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow\ -1 \leqq -\frac{1}{\sqrt{n}} < 0$$

$$\Leftrightarrow\ 1 \leqq -\frac{1}{\sqrt{n}}+2 < 2$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1} \leqq 1$$

以上の結果から，



$$-\frac{1}{5} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$$

//

※ $a=\frac{1}{2}$ も

$a \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$ をみたす!!

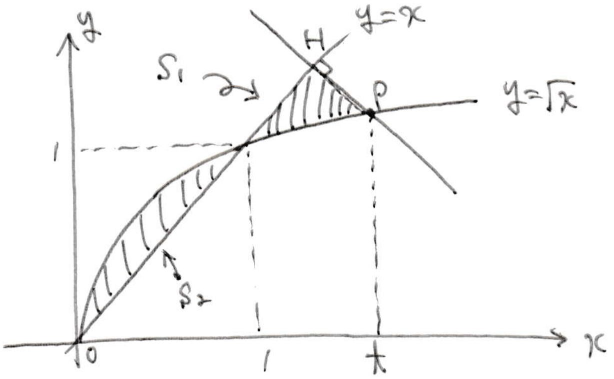
114 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) $x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

(2011-1)



(1) 直線 PH は $y=x$ に垂直なので傾き -1．

∴ PH の方程式は．

$$(y-\sqrt{t}) = -1\cdot(x-t)$$

$$y = -x + t + \sqrt{t}.$$

H は，この直線と $y=x$ の共有点であるので

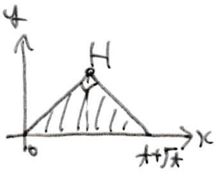
$$x = -x + t + \sqrt{t}$$

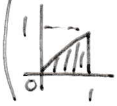
$$x = \frac{t+\sqrt{t}}{2}$$

が H の x 座標となる

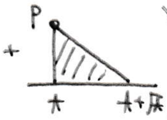
$$\therefore\ \mathrm{H}\left(\frac{t+\sqrt{t}}{2},\ \frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)$$ //

(2) 求める面積 S_1 は，上図の斜線部 S_1 である．図より．

$S_1 =$ 

$-\Bigg($ 

$+$ 

$+$ 

$\Bigg)$

$$= \frac{1}{2}\cdot(t+\sqrt{t})\cdot\frac{t+\sqrt{t}}{2} - \left(\frac{1}{2} + \int_1^t \sqrt{x}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{t}\cdot\sqrt{t}\right)$$

$$= \left(\frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(1+t) - \int_1^t \sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}(t^2+2t\sqrt{t}+t) - \frac{1}{2}(1+t) - \frac{2}{3}(t\sqrt{t}-1)$$

$$\therefore\ S_1 = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t\sqrt{t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{6}$$ //

(3) S_2 は，左上図斜線部 S_2 である．

$S_2 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx -$ 

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$S_1 = S_2$ となるとき．

$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t\sqrt{t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ 3t^2 - 2t\sqrt{t} - 3t = 0$$

$$\Leftrightarrow\ t(3t - 2\sqrt{t} - 3) = 0$$

$t>1$ より

$$3t - 2\sqrt{t} - 3 = 0.$$

$$\sqrt{t} = \frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$$

$\sqrt{t}>0$ より $\sqrt{t} = \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

$$t = \frac{11+2\sqrt{10}}{9}$$

これは $t>1$ をみたす

$$\therefore\ t = \frac{11+2\sqrt{10}}{9}$$ //

$\boxed{115}$ aの正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) $x \geqq 3$ の時，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$$

を求めよ。

(3) kを定数とする。$y = x^2 + 2x + 2$ のグラフと $y = ke^x + a^2$ のグラフが異なる3点で交わるための必要十分条件を，aとkを用いて表せ。

(2011-2)

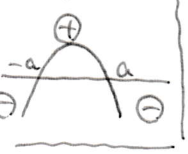
(1)
$$f(x) = \frac{x^2+2x+2-a^2}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)e^x - (x^2+2x+2-a^2)e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{-x^2+a^2}{e^x} = -\frac{(x-a)(x+a)}{e^x}$$

$\therefore$ $x=-a, a$ で $f'(x)=0$ となる.

f'の符号



x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	極小	↗	極大	↘

増減表より.

$x=-a$ で極小値 $f(-a) = 2(1-a)e^a$

$x=a$ で極大値 $f(a) = 2(1+a)/e^a$ //

(2) 〈証明〉

$g(x) = x^3e^{-x}$ とおく.

$g'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3e^{-x}$

$= x^2e^{-x}(3-x)$

$x \geqq 3$ で $g'(x)=0$ となるのは $x=3$ のとき.

x	3	$\cdots$
g'	0	$-$
g	$27e^{-3}$	↘

増減表から. $x \geqq 3$ において

$27e^{-3} \geqq x^3 \cdot e^{-x}$

前半の証明より. $x \geqq 3$ において

$$0 < x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$$

辺々 $x \geqq 3$ で 割ると

$$0 < x^2e^{-x} \leqq \frac{27e^{-3}}{x}$$

さて.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{27e^{-3}}{x} = 0 \text{ より.}$$

はさみうちの原理から.

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0 \quad //$$

(3) $y = x^2+2x+2$ と $y = ke^x + a^2$ の共有点の x座標は

$$x^2+2x+2 = ke^x + a^2 \quad \cdots (*)$$

の解である. 式変形を行い.

$$x^2+2x+2-a^2 = ke^x.$$

$e^x > 0$ より

$$\frac{x^2+2x+2}{e^x} = k$$

つまり. $(*)$ の解は. $y=f(x)$ と $y=k$ の共有点の x座標である.

ここで. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^2+2x+2-a^2) = \infty$ より

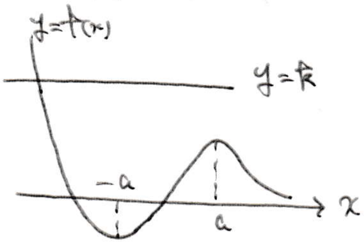
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$

また、(2)より

$\lim_{x\to\infty} x^2e^x = 0$ より.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 .$$

(i) $f(-a) \leqq 0$ のとき. つまり $2(1-a)e^a \leqq 0$
$1-a \leqq 0$ のとき.

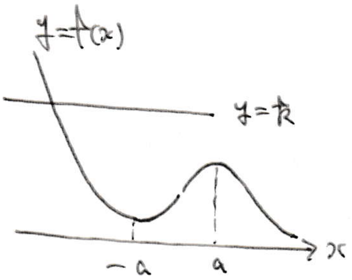


$y=f(x)$ と $y=k$ が異なる共有点を3つもつ必要十分条件は

$$0 < k < f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < k < \frac{2(1+a)}{e^a}$$

(ii) $f(-a) > 0$ のとき つまり. $1-a > 0$ のとき.



$y=f(x)$ と $y=k$ が異なる共有点を3つもつ必要十分条件は

$$f(-a) < k < f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1-a)e^a < k < \frac{2(1+a)}{e^a}$$

(i)(ii)より

求める必要十分条件は.

$$\begin{cases} 0 < k < 2(1+a)e^{-a} & (1 \leqq a \text{ のとき}) \\ 2(1-a)e^a < k < 2(1+a)e^{-a} & (1 > a > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

//

116 xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $P_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に，点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

(2010-3)

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$

$y' = -2\cdot\dfrac{1}{x^3}$ より.

$\left(t,\ \dfrac{1}{t^2}\right)$ における接線の方程式は.

$$y-\frac{1}{t^2} = -2\frac{1}{t^3}(x-t)$$

これが $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ を通るので.

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3}(a-t)$$

$$t^3-3a^2t+2a^3=0 \quad (*)$$

$$(t-a)^2(t+2a)=0$$

Q_1 は第2象限内にあるので.

$t=-2a$.

よって Q_1 の座標は.

$$\left(-2a,\ \frac{1}{4a^2}\right) \quad /\!/$$

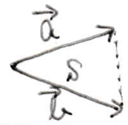
(2) P_2 の座標は、(1)において $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ を $\left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right)$ で読みかえればよいので、

$$P_2\left(4a,\ \frac{1}{16a^2}\right)$$

となる.

(*) 接線は $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ で接するので a を重解にもつことがすぐ分かり、容易に因数分解できる!

三角形の面積



$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき.

$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}3a\\-\dfrac{15}{16a^2}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{P_1Q_1}=\begin{pmatrix}-3a\\-\dfrac{3}{4a^2}\end{pmatrix}$$

より.

$$S_1=\frac{1}{2}\left|3a\cdot\left(-\frac{3}{4a^2}\right)+3a\cdot\left(-\frac{15}{16a^2}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|3a\cdot\frac{27}{16a^2}\right|$$

$$=\frac{81}{32}\left|\frac{1}{a}\right|$$

点 P_1 は第1象限内なので $a>0$.

$$\therefore\ S_1=\frac{81}{32a} \quad /\!/$$

(3) P_n の座標を $\left(a_n,\ \dfrac{1}{a_n^2}\right)$ とおく.

(1),(2)と同じ議論で

$$S_n=\frac{81}{32a_n}$$

となる.

ここで、P_n の x 座標 a_n は.

$$a_n=4^{n-1}\cdot a$$

と表すことができるので、

$$S_n=\frac{81}{32}\cdot\frac{1}{4^{n-1}a}$$

$$=\frac{81}{32a}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}=\frac{81}{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} \quad /\!/$$

(4) (3)より.

$$S_n = \frac{81}{32a} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

初項 $\frac{81}{32a}$, 公比 $\frac{1}{4}$ であるので.

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \cdot \frac{81}{32a}$$

$$= \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \cdot \frac{81}{32a}$$

$$= \frac{27}{8a}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{27}{8a}$$

//

117 曲線 C_1： $y=\dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における~~接線~~法線の交点を~~T~~ R とする。ただし，$b \neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近く。A の座標を a で表せ。

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2009-3)

(1) (i) $a \neq 0$ のときを考える。

$y' = x$ より，点 $\left(t,\ \frac{t^2}{2}\right)$ における法線の方程式は，

$$y-\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}(x-t)$$

$$y = -\frac{1}{t}x+1+\frac{t^2}{2}$$

であるので，点 P については

$$y=-\frac{1}{a}x+1+\frac{a^2}{2}$$

点 Q については

$$y=-\frac{1}{b}x+1+\frac{b^2}{2}$$

よって，共有点の x 座標は，

$$-\frac{1}{a}x+1+\frac{a^2}{2} = -\frac{1}{b}x+1+\frac{b^2}{2}$$

$$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)x = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$\frac{a-b}{ab}x = \frac{-1}{2}(a-b)(a+b)$$

$$x=-\frac{1}{2}ab(a+b)$$

∴ b が a に限りなく近づくとき，

$$\lim_{b\to a} x = \lim_{b\to a}\left(-\frac{1}{2}ab(a+b)\right)$$

$$=-a^3$$

さて，同様に

$$\lim_{b\to a} y = -\frac{1}{a}(-a^3)+1+\frac{1}{2}a^2$$

$$=1+\frac{3}{2}a^2$$

よって，点 A の座標は，

$$A\left(-a^3,\ 1+\frac{3}{2}a^2\right)$$

(ii) $a=0$ のとき，

点 P における法線の方程式は，

$$x=0$$

これと点 Q の法線の共有点は

$$(x,y)=\left(0,\ 1+\frac{b^2}{2}\right)$$

b を $a=0$ に限りなく近づけることを考えれば

$$(x,y)=(0,1)$$

となり，(i) の結論と同値。

(i)(ii) より A の座標は，

$$\left(-a^3,\ 1+\frac{3}{2}a^2\right)$$ //

(2) Aの座標を(x, y)とおけば、

$$x = -a^3$$
$$y = \frac{3}{2}a^2 + 1$$

より、

$$a = x^{\frac{1}{3}}$$ なので

曲線C_2の方程式は、

$$y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 1$$

となる。

C_2はy軸に関し対称なので、

$x>0$について調べる。

$$y' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} > 0$$

$$y'' = -\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{4}{3}} < 0$$

よって、C_2について増減表は

x	0	
y'	/	+
y''	/	−
y	1	↗

また、C_1とC_2の共有点は、

$$\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 1 = \frac{1}{2}x^2$$

$x^{\frac{2}{3}} = t$とおくと

$$\frac{3}{2}t + 1 = \frac{1}{2}t^3$$

$$t^3 - 3t - 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1)^2 = 0$$

$$t = -1,\ 2$$

$t = x^{\frac{2}{3}} \geq 0$より $t = 2$

$$x^{\frac{2}{3}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{2} \quad (\because x \geq 0)$$

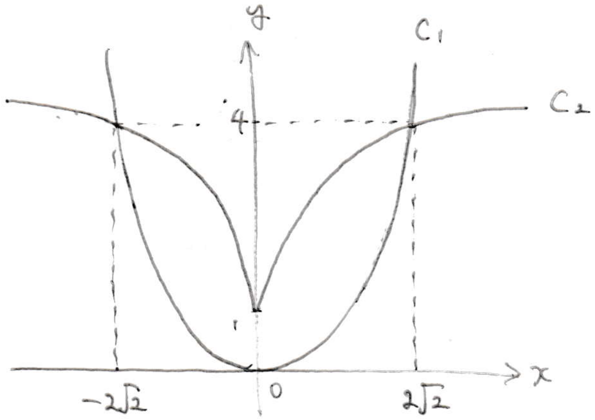
$$y = \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4.$$

C_1, C_2共にy軸に関し対称なので

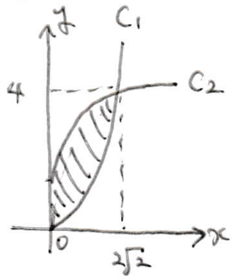
共有点は

$$(\pm 2\sqrt{2},\ 4)$$ //

グラフの概形は以下。



(3)



グラフの対称性より、求める面積は左図の斜線部を2倍したものである。

左図斜線部の面積をSとおく。

$$S = \int_0^{2\sqrt{2}} \left\{\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 1\right) - \left(\frac{1}{2}x^2\right)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{9}{2}} + 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{5}\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 8 + 2\right)$$

$$= \frac{44\sqrt{2}}{15}$$

∴ 求める面積は

$$\frac{44\sqrt{2}}{15} \times 2 = \frac{88\sqrt{2}}{15}$$ //

118 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ を求めよ。

(2008-1)

(1) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

・ $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$

$= \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

より．$y=f(x)$ は単調増加．

・ $f''(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4}$

$= \dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$

より．$x=0$ で $f''(x)=0$．

$x<0$ で $f''(x)>0$ より 下に凸．

$x>0$ で $f''(x)<0$ より 上に凸．

・ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$．なので．

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$．

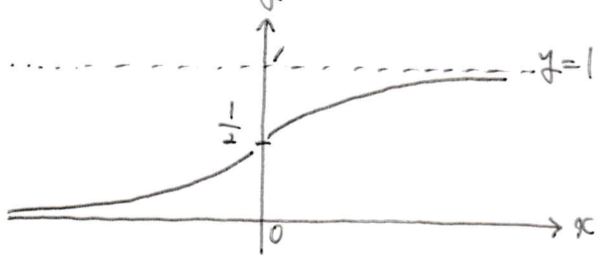
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$．

であり．$y=f(x)$ が単調増加関数なので．

漸近線は．

$y=0$．$y=1$

・ $f(0) = \frac{1}{2}$ より．上記の結果を踏まえて．グラフは以下．



(2) $y=f(x)$：単調増加で値域は $0<y<1$．

より．$f(x)$ の逆関数は存在し．定義域は $0<x<1$．

さて．

$y = f(x)$

$y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

$y(e^x+1) = e^x$

$y = (1-y)e^x$

$1-y \neq 0$ より．

$e^x = \dfrac{y}{1-y}$

$0<y<1$ より　$0<1-y<1$ なので

$0 < \dfrac{y}{1-y}$　である．

辺々底が e の対数をとって．

$x = \log\dfrac{y}{1-y}$

よって．

$f^{-1}(x) = \log\dfrac{x}{1-x}$　//

(3)

$$f^{-1}(x) = \log \frac{x}{1-x}$$

$$= \log \left(\frac{1-x}{x}\right)^{-1}$$

$$= -\log \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

より.

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) = -\log (n+1).$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\log n$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\log (n+1) + \log n$$

$$= -\log \frac{n+1}{n}$$

$$= -\log \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

よって.

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\log\left(\frac{1}{n+2}\right) - \log\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{-n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}.$$

$$= -\log e = -1 \qquad //$$

ネイピア数 e の定義.

$$\boxed{\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ &= \lim_{m\to 0} (1+m)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}}$$

$\boxed{119}$ $a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x\ (x>0)$，$g(x)=\sqrt{x-1}\ (x \geqq 1)$ とおく。２曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点での共有の接線 l を持つとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) ２曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。

(3) ２曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2008-4)

(1) $f(x)=a+\log x$.

$f'(x)=\frac{1}{x}$.

$g(x)=\sqrt{x-1}$

$g'(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

さて，点Pの座標を $(t,\sqrt{t-1})$ とおく．
この点での２曲線での接線が一致するので，

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{2}(t-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{t-1}=t$$

$$\Leftrightarrow\ t^2-4t+4=0$$

$$t=2.$$

$\therefore$ Pの座標は $(2,1)$ //

$f(2)=g(2)$ より

$$\sqrt{2-1}=a+\log 2$$

$$\therefore\ a=1-\log 2 \quad //$$

接線の傾きが $\frac{1}{2}$ より．

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$\therefore\ l: y=\frac{1}{2}x \quad //$$

(2) $f(x)$ と $g(x)$ の差について考える．

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく． $(x>1)$.

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x-1}-x}{2x\sqrt{x-1}}$$

$h'(x)=0$ となる x は．

$$2\sqrt{x-1}-x=0 \Leftrightarrow 4(x-1)=x^2$$

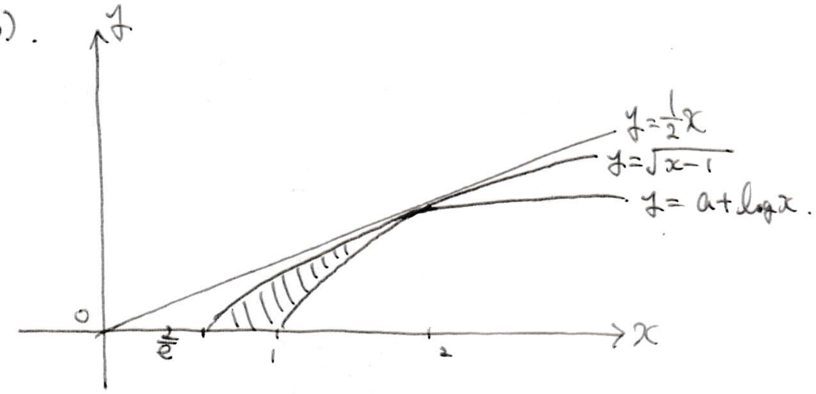
$$\Leftrightarrow x=2.$$

より．$x=2$ でのみ $h'(x)=0$ となる．

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
h'	/	$-$	0	$-$
h	a	↘	0	↘

増減表より．$h(x)$ は $x=2$ のときにのみ値0をとる．
つまり．$f(x)-g(x)=0$ となるのは $x=2$ のときのみ．
$\therefore$ ２曲線は点P以外に共有点をもたない．□

(3).



$f(x)=0$ とおく.

$$1-\log 2+\log x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \log x=\log 2-1$$

$$=\log\frac{2}{e}$$

$\therefore$ $y=f(x)$ と x軸の共有点は $x=\frac{2}{e}$

よって. 求める面積 S は上図の斜線部.

$$S=\int_{\frac{2}{e}}^{2}f(x)\,dx-\int_{1}^{2}g(x)\,dx$$

さて.
$$\int_{\frac{2}{e}}^{2}f(x)\,dx=\int_{\frac{2}{e}}^{2}(a+\log x)\,dx$$

$$=\Big[ax+x\log x\Big]_{\frac{2}{e}}^{2}-\int 1\cdot dx$$

$$=\Big[(a-1)x+x\log x\Big]_{\frac{2}{e}}^{2}$$

$$=\Big[x(\log x-\log 2)\Big]$$

$$=\frac{2}{e}.$$

$$\int_{1}^{2}g(x)\,dx=\int_{1}^{2}\sqrt{x-1}\,dx$$

$$=\Big[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{1}^{2}$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ S=\frac{2}{e}-\frac{2}{3}$$ //

120 $f(x)=xe^x$ とおく。また，p を $p \geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y=f(x)$，接線 $y=g(x)$，および 2 直線 $x=0$，$x=L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq 0$ における $S(p)$ の~~最大~~最小値を与える p の値を求めよ。

(2007-1)

(1) $x \geqq 0$ において、

$f(x) = xe^x$

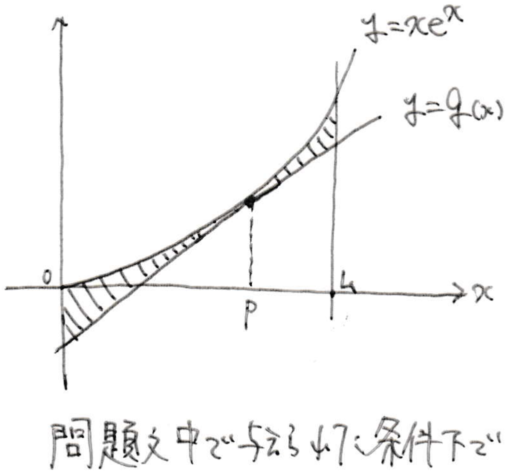
$f'(x) = e^x(1+x) > 0$

$f''(x) = e^x(2+x) > 0$.

であるので、$y=f(x)$ のグラフは、単調増加でかつ下に凸である。
よって、点 P での接線 $y=g(x)$ のグラフは、$y=f(x)$ よりも下にある。

$\therefore$ $f(x) \geqq g(x)$ が成立. □.

(2)



問題文中で与えられた条件下で、面積 $S(p)$ は上図の斜線部である。

まず、接線の方程式を求める。
接点が $(p,\ pe^p)$ で傾きが $e^p(1+p)$ より、

$$y - pe^p = e^p(1+p)(x-p)$$
$$y = e^p(1+p)x - p^2e^p.$$

$$\therefore S_p = \int_0^L (f(x) - g(x))\,dx$$
$$= \int_0^L (xe^x - e^p(1+p)x + p^2e^p)\,dx$$

ここで、

$$\int_0^L xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^L = (L-1)e^L + 1.$$
$$\int_0^L e^p(1+p)x\,dx = \frac{1}{2}e^p(1+p)L^2$$
$$\int_0^L p^2e^p\,dx = p^2e^pL.$$

$$\therefore S(p) = (L-1)e^L + 1 - \frac{1}{2}e^p(1+p)L^2 + p^2e^pL.$$

$$S'(p) = -\frac{1}{2}L^2e^p(p+2) + Le^p(p^2+2p)$$
$$= -\frac{1}{2}Le^p\{-2p^2 + (L-4p)p + 2L\}$$
$$= \frac{1}{2}Le^p\{2p^2 + (4p-L)p - 2L\}$$
$$= \frac{1}{2}Le^p(p+2)(2p-L)$$

より、$p \geqq 0$ において $S'(p)=0$ となるのは $p=\frac{1}{2}L$ のとき。

p	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}L$	$\cdots$
S'		$-$	0	$+$
S		↘	極小	↗

増減表より、$S(p)$ の最小値を与える p の値は

$$p = \frac{1}{2}L$$

//