121 次の問いに答えよ。ただし，$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1) 自然数 n ~~の~~に対して，方程式 $\frac{\log x}{x}=\frac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) の二つの実数解を α_n, β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，
$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$, $ne<\beta_n$
が成り立つことを示せ。また，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

(2006-1)

(1) $f(x)=\frac{\log x}{x}$ とおく．$(x>0)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}$$

$$=\frac{1-\log x}{x^2}.$$

∴ $x=e$のとき $f'(x)=0$．

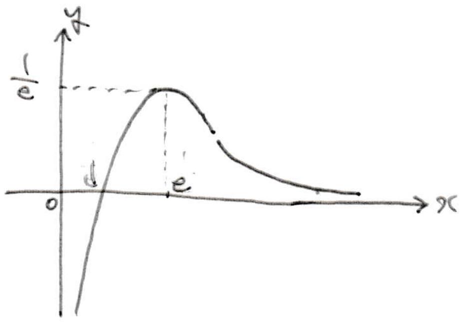
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
f'	/	+	0	−
f	/	↗	$\frac{1}{e}$	↘

また．$f(x)=0$とおくと．

$\frac{\log x}{x}=0$　　∴ $x=1$．

$\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$．$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

より．$y=f(x)$のグラフは下図．



グラフより．$y=a$ (a:定数) が $y=f(x)$と共有点を2個もつには．

$0<a<\frac{1}{e}$

をみたせばよい．

$e<3$より．$\frac{1}{3}<\frac{1}{e}$．

$n\geqq 1$より．$0<\frac{1}{3n}<\frac{1}{e}$

∴ $a=\frac{1}{3n}$ は条件をみたす．

∴ 方程式 $\frac{\log x}{x}=\frac{1}{3n}$ は

$x>0$の範囲にちょうど2つの実数解をもつ □．

(2) $g(x)=\frac{\log x}{x}-\frac{1}{3n}$ について考える．

$g(1)=-\frac{1}{3n}<0$．

$g(e^{\frac{1}{n}})=\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{3n}$

$=\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}n}-\frac{1}{3n}$

ここで．$e<3$ より．$e^{\frac{1}{n}}<3$．

∴ $\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}>\frac{1}{3}$ より．

$g(e^{\frac{1}{n}})>0$．

$y=g(x)$ は $1<x<e^{\frac{1}{n}}<e$

で単調増加であり．$g(1)<0$．$g(e^{\frac{1}{n}})>0$

より求める方程式の実数解のうち1つは

$1<x<e^{\frac{1}{n}}$ の範囲に存在する．

また左図から．$1<\alpha_n<e$ より．

$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$

$$g(ne) = \frac{\log ne}{ne} - \frac{1}{3n}$$

$$= \frac{\log n + 1}{ne} - \frac{1}{3n}$$

$$> \frac{\log n + 1}{3n} - \frac{1}{3n}$$

$$= \frac{\log n}{3n} \geqq 0 . \quad (\because n \geqq 1)$$

また、

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\log x}{x} - \frac{1}{3n} \right)$$

$$= -\frac{1}{3n} < 0 .$$

であり、$g(x)$ は $(e<)ne<x$ で単調減少。

∴ 実数解 β_n は、$ne < \beta_n$ をみたす。□.

(2)の前半で示したことから、

$$1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$$

ここで $\lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$.

はさみうちの原理より、$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 1$ //

122 直線 $l: y = x + a$ が曲線 $C: y = 2\sin x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

(2005-1)

(1) $y = 2\sin x$

$y' = 2\cos x$

より．点 $(t, 2\sin t)$ における曲線Cの接線の傾きは．$2\cos t$．

直線 l が曲線Cに接する，つまり l が C の接線となればよく．l の傾きは1．

$2\cos t = 1$ となる t $(-\pi \leqq t \leqq \pi)$ は．

$\cos t = \frac{1}{2}$

$t = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

∴ l と C の接する点は．

$\left(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$．

直線 l がこの点を通るので．

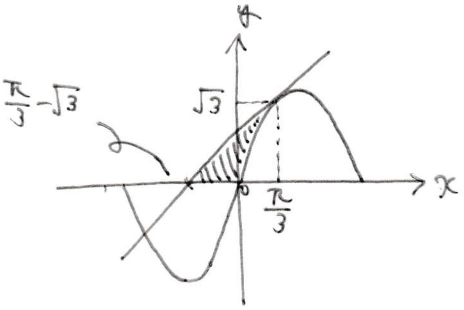
$-\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} + a \iff a = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$．

$\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + a \iff a = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

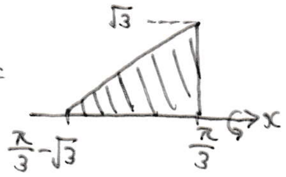
また．$a \geqq 0$ より．

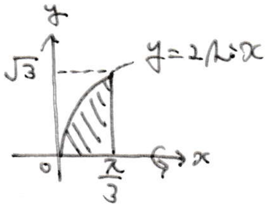
$a = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ //

(2) 直線 l の方程式は $y = x + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$．



求める体積は上図の斜線部をx軸まわりに回転させたものである．

$V =$ 

$-$ 

$= \pi(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} \times \frac{1}{3} - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\sin x)^2 dx$

$= \sqrt{3}\pi - 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx$

ここで $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$．

∴ $V = \sqrt{3}\pi - 4\pi\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

$= \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi - \frac{2}{3}\pi^2$ //

123 定数 a, b を係数とする2次関数 $y=-ax^2+b$ のグラフが，原点を中心とする半径1の円と異なる2点で接している。ただし，$a>0$ とする。

(1) a, b の条件式，および接点の座標を求めよ。

(2) 与えられた二次関数のグラフと x 軸で囲まれる部分を，y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。

(3) V を最小にする a, b の値，およびそのときの V の値を求めよ。

(2000-2)

(1) 原点が中心の半径1の円の方程式は．

$$x^2+y^2=1 \iff x^2=1-y^2$$

この円と $y=-ax^2+b$ の共有点の y 座標は．

$$y=-a(1-y^2)+b.$$

$$\iff ay^2-y+b-a=0 \cdots ①$$

の解である．

2つの曲線が接するには，この方程式が重解をもてばよいので，判別式をDとおけば

$$D=1-4a(b-a)=0.$$

$$4a^2-4ab+1=0$$

$$b=\frac{4a^2+1}{4a} \cdots ②$$

また．①より．

$$ay^2-y+\frac{4a^2+1}{4a}-a=0$$

$$\iff ay^2-y+\frac{1}{4a}=0$$

$$\iff a\left(y-\frac{1}{2a}\right)^2=0$$

より．共有点の y 座標は．

$$y=\frac{1}{2a}.$$

ここで．$0<y<1$ より

$$0<\frac{1}{2a}<1$$

$$2a>1 \quad \therefore a>\frac{1}{2} \cdots ③$$

共有点の x 座標は．$x^2+y^2=1$ より

$$x^2+\frac{1}{4a^2}=1.$$

$$x^2=1-\frac{1}{4a^2}$$

$$=\frac{4a^2-1}{4a^2}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{4a^2-1}}{2a} \cdots ④$$

②〜④より．

a. b の条件式は

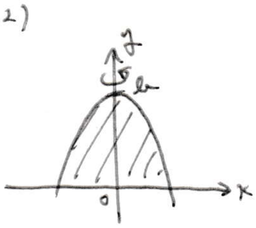
$$b=\frac{4a^2+1}{4a}, \quad a>\frac{1}{2}$$

接点は．

$$\left(\pm\frac{\sqrt{4a^2-1}}{2a}, \frac{1}{2a}\right)$$

//

(2)



求める体積Vは．左図の斜線部を y 軸まわりに回転させたものである．

$$V=\pi\int_0^b x^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^b \frac{b-y}{a}\,dy$$

$$=\frac{\pi}{a}\left[by-\frac{1}{2}y^2\right]_0^b$$

$$=\frac{\pi}{2a}\cdot b^2$$

$$=\frac{\pi}{2a}\cdot\left(\frac{4a^2+1}{4a}\right)^2=\frac{(4a^2+1)^2}{32a^3}\pi$$

//

(3). V を a の関数とみなし. $V(a)$ とおく.

$$V'(a) = \frac{2(4a^2+1)\cdot 8a\cdot 32a^3 - (4a^2+1)^2\cdot 3\cdot 32a^2}{(32a^3)^2}\pi$$

$$= \frac{32a^2(4a^2+1)(16a^2-(12a^2+3))}{(32a^3)^2}\pi$$

$$= \frac{(4a^2+1)(4a^2-3)\pi}{32a^4}$$

$a > \frac{1}{2}$ より. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $V'(a) = 0$.

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
V'	/	$-$	0	$+$
V		↘		↗

増減表より. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき. V は最小値

$$V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\left(4\cdot\frac{3}{4}+1\right)^2}{32\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}\pi$$

$$= \frac{16}{12\sqrt{3}}\pi = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi.$$

をとる.

また. このときの h の値は.

$$h = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

//

124 C_1, C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$C_1 : y=-x^2+2x\ (0 \leqq x \leqq 2)$, $C_2 : y=-x^2-2x\ (-2 \leqq x \leqq 0)$

また，a を実数とし，直線 $y=a(x+4)$ を l とする。

(1) 直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点を持つための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が (1) の条件を満たすとする。このとき，l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

(2015-1)

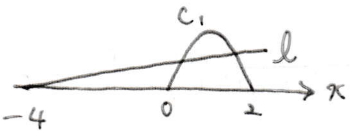
(1) 直線 l と C_1 の共有点の x 座標は.

$-x^2+2x-a(x+4)=0$ ---①

を解けばよい.

① ⇔ $x^2+(a-2)x+4a=0$.

$0<x<2$ で l と C_1 が接する条件は.



$D=(a-2)^2-4\cdot4a=0$

$0<-\dfrac{a-2}{2}<2$

さて. $0<-\dfrac{a-2}{2}<2$ より

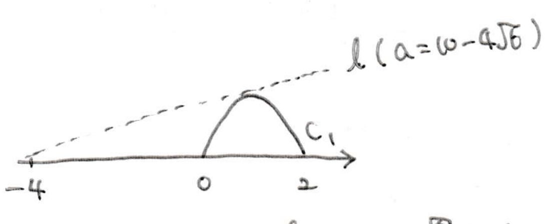
$-2<a<2$. ---②

また. $(a-2)^2-16a=0$ より

$a^2-20a+4=0$

$a=10\pm4\sqrt{6}$. ---③

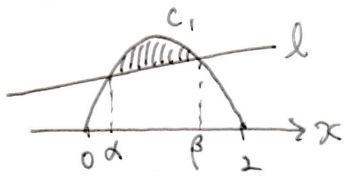
②③より $a=10-4\sqrt{6}$.



上図より. l が C_1 と異なる2つの共有点をもつ条件は.

$0\leq a<10-4\sqrt{6}$. //

(2)



求める面積 S_1 は左図の斜線部である. 2つの共有点を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと.

$S_1=\int_\alpha^\beta\{-x^2+2x-a(x+4)\}\,dx$

$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

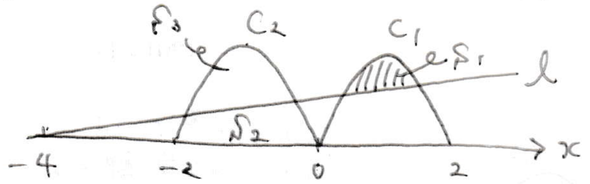
ここで. ①より. 共有点の x 座標は

$x=\dfrac{-(a-2)\pm\sqrt{a^2-20a+4}}{2}$

なので $\beta-\alpha=\sqrt{a^2-20a+4}$.

∴ $S_1=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3$ //

(3)



まず、

$$S_2+S_3=\int_{-2}^{0}\{-x^2-2x\}\,dx$$
$$=-\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3}.$$

さて、C_2とlの共有点のx座標をα, β $(\alpha<\beta)$ とおくと.

$$S_3=\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2-2x)-a(x+4)\}\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで、

$$(-x^2-2x)-a(x+4)=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x^2+(2+a)x+4a=0 \quad \text{より}$$
$$x=\frac{-(2+a)\pm\sqrt{(2+a)^2-16a}}{2}$$
$$=\frac{-(2+a)\pm\sqrt{a^2-12a+4}}{2}$$

なので

$$\beta-\alpha=\sqrt{a^2-12a+4}.$$

$$\therefore\ S_3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3$$

以上の結果から.

$$S_1=S_2 \Leftrightarrow S_1=\frac{4}{3}-S_3$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3$$

よって、$S_1=S_2$となるaが $0<a<\frac{1}{5}$ を示すには、

$$\frac{1}{6}\left\{\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3+\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3\right\}-\frac{4}{3}=0$$

をみたすaが $0<a<\frac{1}{5}$ の範囲にあることを示せばよい.

・$a=0$のとき.

$$(\text{左辺})=\frac{1}{6}\{2^3+2^3\}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}>0.$$

・$a=\frac{1}{5}$ のとき

$$(\text{左辺})=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{41}}{5}\right)^3\right\}-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1+(\sqrt{41})^3}{5^3}-\frac{10^3}{5^3}\right)$$

$1^3+(\sqrt{41})^3<10^3$ より

$(\text{左辺})<0.$

$\therefore$ $S_1=S_2$をみたすaは $0<a<\frac{1}{5}$ の範囲に存在 ■

$\boxed{125}$ 座標平面上の曲線 C_1, C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \ (x > 0),\ C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし，a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1, C_2 が 2 点 P, Q で交わり，P, Q の x 座標はそれぞれ 1, $n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

(2016-1)

(1) $y=\log x$ と $y=(x-1)(x-a)$ が

P$(1, 0)$ と Q$(n+1, \log(n+1))$ で共有点をもつので、

$$\log(n+1) = (n+1-1)(n+1-a)$$

$$\log(n+1) = n(n+1-a)$$

$$\log(n+1) - n(n+1) + na = 0$$

$$a = n+1-\frac{1}{n}\log(n+1) \quad /\!/$$

〈証明〉.

$$a-1 = n-\frac{1}{n}\log(n+1)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n^2-\log(n+1)\right).$$

$a>1$ を示すには. $a-1>0$ を示せばよい.

(右辺)>0 を示せばよいので. $n \geq 1$ で

$n^2 > \log(n+1)$ を示せばよい.

$n^2-\log(n+1) = f(n)$ とおく.

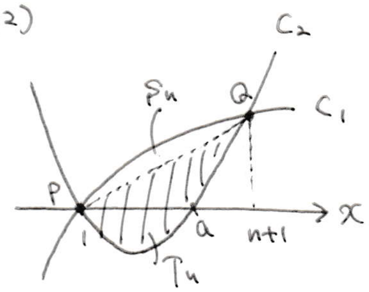
$$f'(n) = 2n-\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2n(n+1)-1}{n+1} > 0 \quad (n \geq 1)$$

$\therefore\ f(n) > f(1) = 1-\log 2 > 0$.

よって. $a-1>0$ i.e. $a>1$ $\boxed{\text{証}}$

(2)

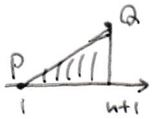


S_n と T_n は各々左図で示した領域の面積である.

$$T_n = \int_1^{n+1} (\mathrm{PQ} - C_2)\,dx$$

$$= -\int_1^{n+1} (x-1)(x-(n+1))\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\{(n+1)-1\}^3 = \frac{n^3}{6} \quad /\!/$$

$S_n =$  $-$ 

$$= \int_1^{n+1} \log x\,dx - \frac{1}{2}n\log(n+1)$$

$$= \left[x\log x\right]_1^{n+1} - \int_1^{n+1} dx - \frac{1}{2}n\log(n+1)$$

$$= (n+1)\log(n+1) - n - \frac{1}{2}n\log(n+1)$$

$$= \frac{n+2}{2}\log(n+1) - n. \quad /\!/$$

(3) (2)の結果を用いて.

$$\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\frac{n+2}{2}\log(n+1) - n}{n\log\frac{n^3}{6}}$$

$$= \frac{(n+2)\log(n+1) - 2n}{2n(3\log n - \log 6)}$$

$$= \frac{n+2}{2n}\cdot\frac{\log(n+1)}{3\log n - \log 6} - \frac{1}{3\log n - \log 6}$$

ここで,

$$\frac{n+2}{2n} \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty)$$

$$\frac{1}{3\log n - \log 6} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

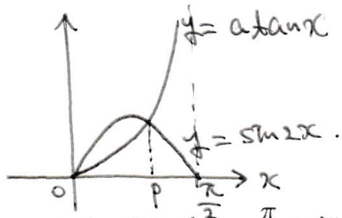
$$\frac{\log(n+1)}{3\log n - \log 6} = \frac{\log(n+1)}{\log n}\cdot\frac{1}{3 - \frac{\log 6}{\log n}}$$

$$\to 1\cdot\frac{1}{3} \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - 0$$

$$= \frac{1}{6}$$

//



126 定数$a>0$に対し，曲線$y=a\tan x$の$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$の部分をC_1，曲線$y=\sin 2x$の$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$の部分をC_2とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1とC_2が原点以外に交点を持つためのaの条件を求めよ。

(2) aが(1)の条件を満たすとき，原点以外のC_1とC_2の交点をPとし，Pのx座標をpとする。PにおけるC_1とC_2のそれぞれの接線が直行するとき，aおよび$\cos 2p$の値を求めよ。

(3) aが(2)で求めた値のとき，C_1とC_2で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2017-1)

(1) $y=a\tan x$ と $y=\sin 2x$ の共有点のx座標は，

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ において，

$a\tan x=\sin 2x$.

⇔ $a\dfrac{\sin x}{\cos x}=2\sin x\cos x$

⇔ $\sin x(a-2\cos^2 x)=0$.

$x\neq 0$ より， $\cos x=\sqrt{\frac{a}{2}}$

をみたすxが原点以外の共有点となればよい。

$0<x\leqq\frac{\pi}{2}$ で共有点をもつには

$0<\sqrt{\frac{a}{2}}<1$

i.e.

$0<a<2$ //

(2) C_1において， $y'=\dfrac{a}{\cos^2 x}$

C_2において， $y'=2\cos 2x$.

であり，条件より点Pで C_1とC_2が直交するので

$\dfrac{a}{\cos^2 p}\cdot 2\cos 2p=-1$.

⇔ $2a(2\cos^2 p-1)=-\cos^2 p$.

さて，(1)より $\cos p=\sqrt{\frac{a}{2}}$ なので

$2a\cdot\left(2\cdot\frac{a}{2}-1\right)=-\frac{a}{2}$

$4a^2-4a=-a$.

$a(4a-3)=0$

∴ $a=0,\ \frac{3}{4}$.

$a>0$ より $a=\frac{3}{4}$ //

このとき，

$\cos 2p=2\cos^2 p-1$

$=2\cdot\frac{a}{2}-1=-\frac{1}{4}$ //

(3) (2)より $a=\frac{3}{4}$.

$S=\int_0^p\left(\sin 2x-\frac{3}{4}\tan x\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{3}{4}\cdot\log|\cos x|\right]_0^p$

$=-\frac{1}{2}\cos 2p-\frac{3}{4}\log|\cos p|+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}\log\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}$ //

127 原点を中心とする半径 3 の半円 $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \overset{\geqq}{\cancel{\leqq}} 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

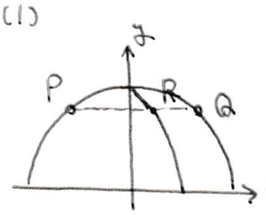
(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標よりも小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $\overset{(-3,\ 0)}{(3,\ 0)}$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(2018-2)

(1)



Qの座標を (x', y') とおくと．

Pは $(-x', y')$．

$PR : RQ = 2 : 1$ より．

Rの座標は．

$$\left(\frac{2x' - x'}{3},\ y'\right) = \left(\frac{1}{3}x',\ y'\right)$$

$R(x, y)$ とおくと

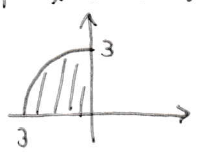
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x' \\ y = y' \end{cases} \quad (y' \geqq 0)$$

(x', y') は半円 C 上より．

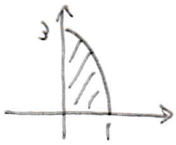
$$(3x)^2 + y^2 = 9. \quad (y \geqq 0)$$

よってRの軌跡は，楕円 $(3x)^2 + y^2 = 9$ のうち，第1象限内のものである．

$\therefore\ S =$



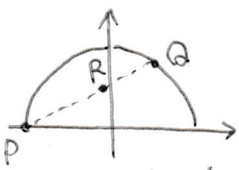
$+$



$$= \frac{1}{4} \cdot 9\pi + \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \pi$$

$$= 3\pi \quad /\!/$$

(2)



Qの座標を (x', y') とおく．

$P(-3, 0)$ より

Rの座標は

$$\left(\frac{2x' - 3}{3},\ \frac{2}{3}y'\right) \quad \text{と書ける．}$$

$R(x, y)$ とおくと

$$\begin{cases} x = \dfrac{2x' - 3}{3} \\ y = \dfrac{2}{3}y' \end{cases} \quad (y' \geqq 0)$$

$$\therefore\ x' = \frac{3}{2}(x+1),\quad y' = \frac{3}{2}y.$$

(x', y') は半円 C 上より．

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$$

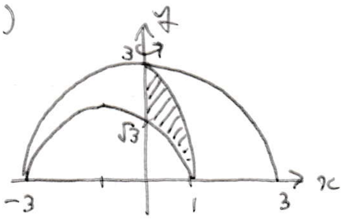
$$(x+1)^2 + y^2 = 4. \quad (y \geqq 0)$$

∴ Rの軌跡は 中心 $(-1, 0)$ 半径2，$y \geqq 0$ の半円．

$\therefore\ T =$

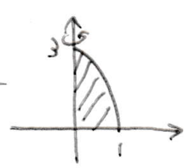
$$= \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi \quad /\!/$$

(3)

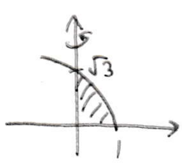


求める体積は
左図の斜線部を
y軸まわりに回転させた
ものである．

$V =$



$-$



$$= V_1 - V_2$$

とおく．

$$V_1 = \pi \int_0^3 x^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{9}y^2\right) dy$$

$$= \pi \left[y - \frac{1}{27}y^3 \right]_0^3 = 2\pi$$

(2)における R の軌跡が $(x+1)^2+y^2=4$ $(y \geqq 0)$

より．

$$(x+1)^2 = 4-y^2$$

$$x+1 = \pm\sqrt{4-y^2}$$

$$x = \pm\sqrt{4-y^2}-1.$$

$x \geqq 0$ において

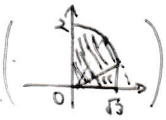
$$x = \sqrt{4-y^2}-1. \qquad (y \leqq \sqrt{3})$$

$$\therefore\ V_2 = \pi\int_0^{\sqrt{3}} x^2\, dy$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-y^2}-1\right)^2 dy$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(5-y^2-2\sqrt{4-y^2}\right) dy$$

$$= \pi\left[5y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{3}} - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$= 4\sqrt{3}\pi - 2\pi$ ()

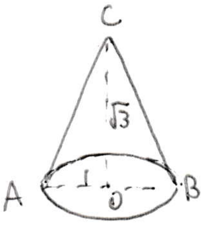
$$= 4\sqrt{3}\pi - 2\pi\left(4\pi\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{3}\pi - \frac{4}{3}\pi^2$$

$$\therefore\ V = 2\pi - 3\sqrt{3}\pi + \frac{4}{3}\pi^2$$

//

128 長さ2の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で2点 A, B を結ぶ最短の道を l とする直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし，以下の問いに答えよ。



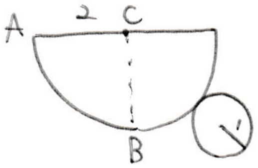
(1) 直円錐の展開図を用いて l の長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle AOQ = \theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲で $\dfrac{OS^2}{OR^2}$ の最大値を求めよ。

(1999-2)

(1) 展開図は下図．



$OC=\sqrt{3}$．$AO=1$ より

$AC=2$．

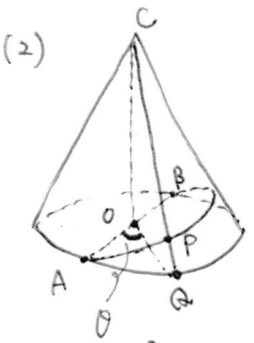
底面の円の周は 2π．
側面のおうぎ形の半径は
2より，おうぎ形の角は

$\frac{2\pi}{4\pi}\times 2\pi = \pi$．

求める l は展開図での線分 AB である．

∴ (lの長さ) $= 2\sqrt{2}$ //

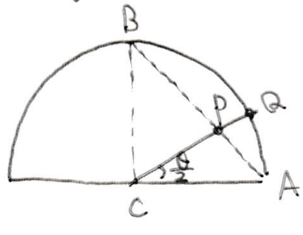
(2)



$\angle AOQ = \theta$ のとき．
$\angle ACQ = \frac{1}{2}\theta$ である．

$\triangle ACP$ において．
正弦定理より．

$$\frac{AC}{\sin\angle APC} = \frac{CP}{\sin\angle CAP}$$



よって

$$CP = \frac{AC}{\sin\angle APC}\cdot\sin\angle CAP$$

ここで．$\angle CAP = \frac{\pi}{4}$．$AC = 2$．より

$$CP = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sin\angle APC}$$

また．$\angle APC = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{\theta}{2}.$$

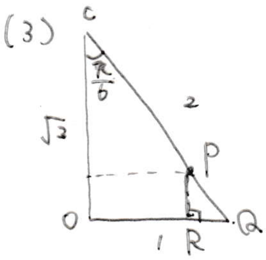
$$\therefore\ CP^2 = 2\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\theta}{2}\right)}$$

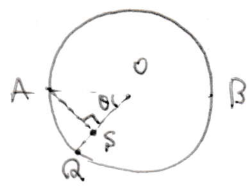
$$= 2\,\frac{1}{\frac{1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)}{2}}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{1+\sin\theta}$$ //

(3)





$OS = 1\cdot\cos\theta$．
$OR = CP\cdot\sin\frac{\pi}{6}$
$= \frac{1}{2}CP$．

$$\therefore\ \frac{OS^2}{OR^2} = \frac{4\cos^2\theta}{CP^2}$$

$$= \cos^2\theta\cdot(1+\sin\theta)$$

$$= (1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$$

$$= (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)^2$$

さて．$x = \sin\theta$ とおき．

$$f(x) = (1-x)(1+x)^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

とする．

$f'(x) = 2(1+x)(1-x) + (1+x)^2 \cdot (-1)$

$\quad = (1+x)(1-3x)$

増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
f'	/	$+$	0	$-$	/
f		$\nearrow$	大	$\searrow$	

表から、$x = \frac{1}{3}$ で f は最大値をとる。

このとき、$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$

これが $\frac{OS^2}{OR^2}$ の最大値である。

—//

129 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて

$$x=\sin t-t\cos t,\ y=\cos t+t\sin t\quad (0\leqq t\leqq \pi)$$

で与えられている。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。

(2) 曲線 C 上の各点 P において，P における接線と P で直行する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は，P を動かすときどんな図形を描くか。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt$ を求めよ。

(4) 曲線 C と y 軸および直線 $y=-1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(1998-3)

(1) 曲線 C の長さ len は.

$$\text{len}=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で表される.

ここで、

$$\frac{dx}{dt}=\cos t-(\cos t+t\cdot(-\sin t))=t\sin t.$$

$$\frac{dy}{dt}=-\sin t+(\sin t+t\cos t)=t\cos t.$$

$$\therefore\ \text{len}=\int_0^{\pi}\sqrt{t^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}t\,dt=\frac{1}{2}\pi^2\quad /\!/$$

(2) 法線を l とおく. l の方程式は.

$$y-(\cos t+t\sin t)=-\frac{dx}{dy}(x-(\sin t-t\cos t))$$

$$\Leftrightarrow y-(\cos t+t\sin t)=-\frac{t\sin t}{t\cos t}(x-(\sin t-t\cos t))\quad \left(t\neq 0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y\cos t-\cos t(\cos t+t\sin t)=-\sin t(x-\sin t+t\cos t)$$

$$\Leftrightarrow y\cos t+x\sin t-1=0\quad \cdots①.$$

また、原点から l への垂線の方程式は.

$$y=\frac{\cos t}{\sin t}x\quad (t\neq 0,\pi)$$

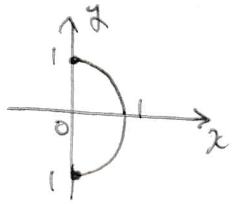
$$y\sin t-x\cos t=0.\quad \cdots②$$

①②より. 原点から l への距離が最短となる点の座標は. $(\sin t,\cos t)$. $\left(t\neq 0,\frac{\pi}{2},\pi\right)$

$t=0,\frac{\pi}{2},\pi$ のときはそれぞれ.

$(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$.

よって. P の軌跡は $x^2+y^2=1$. $(x\geqq 0)$.



(3).

$$\int_0^{\pi}t\sin 2t\,dt=\left[t\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\pi\quad /\!/$$

(4) $t:0\to\pi$ で $x:0\to\pi$.

$$\therefore\ S=\int_0^{\pi}(y-(-1))\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\{\cos t+t\sin t+1\}(t\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\{t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+t\sin t\}\,dt$$

ここで、

・$\displaystyle\int_0^{\pi}t\cos t\sin t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}t\sin 2t\,dt=-\frac{\pi}{4}.$

・$\displaystyle\int_0^{\pi}t^2\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}t^2\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}t^2\cos 2t\,dt$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\left[t^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}2t\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{\pi^3}{6}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\pi.$$

$$\int_0^{\pi} t \sin t \, dt = \left[-t\cos t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t \, dt$$

$$= \pi .$$

$$\therefore S = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2}$$

//

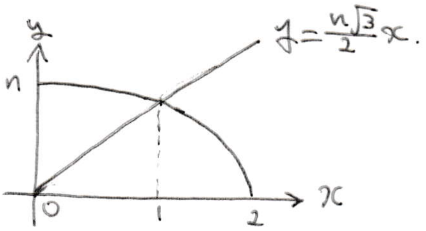
130 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{n^2}=1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

の第一象限内の部分と，直線 $y=\dfrac{n\sqrt{3}}{2}x$ および x 軸で囲まれる部分を A_n とし，A_n の面積を S_n で表す。また，A_n の内部および周上の点 $(x,\ y)$ のうち，x と y がともに整数であるものの総数を T_n で表す。次の問いに答えよ。

(1) T_n, S_n を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

(1995-3)



(1) 第1象限内での共有点の x 座標は，

$$\frac{x^2}{4}+\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{n\sqrt{3}}{2}x\right)^2=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x^2=1$$

$$x^2=1$$

$x>0$ から． $x=1$

・T_n について．

・$x=0$ のとき．
　$y=0$ のみが格子点．

・$x=2$ のとき．
　$y=0$ のみが格子点．

・$x=1$ のとき．
　$0\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}n$ なので，
　x, y が共に整数となる格子点の数は．
　$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}n\right]+1$ コ．

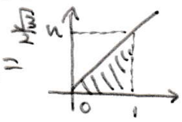
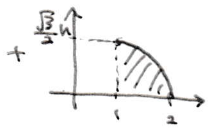
よって．

$$T_n=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}n\right]+3 \quad /\!/$$

ここで，楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{n^2}=1$ の
第一象限内における式は．

$$y=n\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

・S_n について．

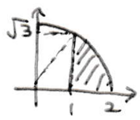
$S_n=$  $+$ 

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}n+\int_1^2 y\,dx.$$

ここで．

$$\int_1^2 y\,dx=\int_1^2 n\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}n\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$=\frac{1}{2}n\times$ 

$$=\frac{1}{2}n\cdot\left(2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

より．

$$S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}n+\frac{\pi}{3}n-\frac{\sqrt{3}}{4}n$$

$$=\frac{\pi}{3}n \quad /\!/$$

(2)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}n-1<\left[\frac{\sqrt{3}}{2}n\right]<\frac{\sqrt{3}}{2}n+1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}n+2<\left[\frac{\sqrt{3}}{2}n\right]+3<\frac{\sqrt{3}}{2}n+4$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}n+2}{\frac{\pi}{3}n}<\frac{T_n}{S_n}<\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}n+4}{\frac{\pi}{3}n}$$

ここで，$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}n+2}{\frac{\pi}{3}n}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\dfrac{6}{\pi n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}n+4}{\frac{\pi}{3}n}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\dfrac{12}{\pi n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

はさみうちの原理から．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \quad /\!/$$

131 xy 座標平面で点 P は点 A(1, 0) を始点として，原点 O を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一定の速さで回転する。点 Q は動径 OP 上を原点 O から出発して一定の速さで P に向かって進み，点 P が円を 1 周して点 A に戻ってきたときにちょうど点 P に到達するとする。このときの点 Q の軌跡を C, $\angle$POA$=\theta$，そして C と線分 OQ とで囲まれる領域の面積を $S(\theta)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) Q の座標を θ を用いて表せ。

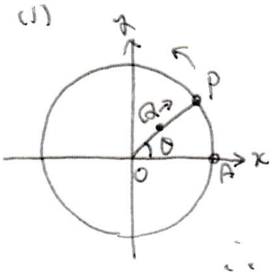
(2) 上の座標を Q(θ) とする。点 Q(π) における C の接線と y 軸との交点の座標を求めよ。

(3) $0 \leqq \theta_1 < \theta_2 \leqq 2\pi$ のとき
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1}{2\pi}\right)^2 < \frac{S(\theta_2)-S(\theta_1)}{\theta_2-\theta_1} < \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2}{2\pi}\right)^2$$
を示せ。

(4) $\dfrac{dS(\theta)}{d\theta}$ および $S(\theta)$ を求めよ。

(1994-3)

(1)



P がちょうど 1 周したときに点 Q が P に到達するので，

$|OQ| = \dfrac{\theta}{2\pi}$

∴ Q の座標は

$\left(\dfrac{\theta}{2\pi}\cos\theta,\ \dfrac{\theta}{2\pi}\sin\theta\right)$ //

(2) $x = \dfrac{\theta}{2\pi}\cos\theta$, $y = \dfrac{\theta}{2\pi}\sin\theta$ より．

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2\pi}(\cos\theta - \theta\sin\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2\pi}(\sin\theta + \theta\cos\theta)$$

$\theta = \pi$ のとき．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{1}{2\pi}(0+\pi\cdot(-1))}{\frac{1}{2\pi}(-1-\pi\cdot 0)} = \pi.$$

また．

$Q(\pi) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

なので．Q(π) における C の接線は．

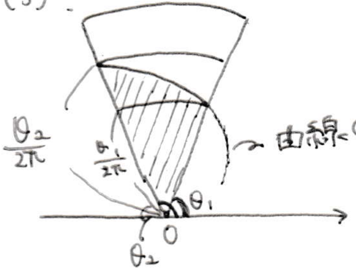
$$y - 0 = \pi\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$y = \pi x + \frac{1}{2}\pi \ //$$

y 軸との交点の座標は．

$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ //

(3)



$S(\theta_2) - S(\theta_1)$ は左図の斜線部である．

図より，$S(\theta_2) - S(\theta_1)$ は，半径 $\frac{\theta_1}{2\pi}$，中心角 $\theta_2 - \theta_1$ のおうぎ形の面積より大きく，半径 $\frac{\theta_2}{2\pi}$，中心角 $\theta_2 - \theta_1$ のおうぎ形の面積よりも小さい．

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1}{2\pi}\right)^2\cdot(\theta_2-\theta_1) < S(\theta_2) - S(\theta_1) < \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2}{2\pi}\right)^2\cdot(\theta_2-\theta_1)$$

(4) (3) で示した式において，$\theta_2 \to \theta_1$ とすると，

$$\frac{S(\theta_2)-S(\theta_1)}{\theta_2-\theta_1} \to \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\theta_1}{2\pi}\right)^2 \quad (\because \text{はさみうち})$$

これが任意の θ_1 $(0 < \theta_1 < 2\pi)$ で成立するので，微分の定義より．

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \ //$$

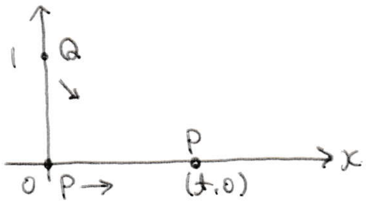
$$S(\theta) = \int_0^\theta \frac{dS(\theta)}{d\theta}\cdot d\theta = \int_0^\theta \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 d\theta = \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^\theta = \frac{\theta^3}{24\pi^2} \ //$$

132 動点Pは原点から出発して，時刻 t における座標は $(t,\ 0)$ であるとする。また動点Qは時刻 $t=0$ のとき点 $(0, 1)$ から出発して点Pとの距離を一定に保ちながら，常に点Pに向かって (すなはちQの速度ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と平行であるように) 進むとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 点Qの時刻 t における座標を $(x,\ y)$ とすると,
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$
が成り立つことを示せ。

(2) 点Qの y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となったときの x 座標を a，y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となった時の x 座標を b とする。点Qの描く曲線と x 軸，直線 $x=a$，および直線 $x=b$ により囲まれる領域の面積を求めよ。

(1993-5)



(1) Qの速度ベクトル $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ が $\overrightarrow{QP}$ と平行なので、

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = k\overrightarrow{QP}$ とおける。

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-x \\ -y \end{pmatrix}$$ より

$\frac{dx}{dt} = k(t-x)$, $\frac{dy}{dt} = -ky$.

また、PとQの距離は1で一定なので、

$(x-t)^2 + y^2 = 1$.

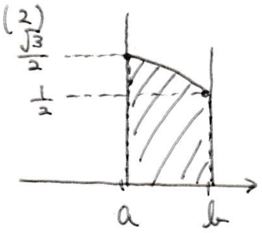
$x - t = \pm\sqrt{1-y^2}$.

ここで、$x < t$ より、$x - t < 0$.

∴ $x - t = -\sqrt{1-y^2}$

よって、
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-ky}{k(t-x)} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$ ■

(2)

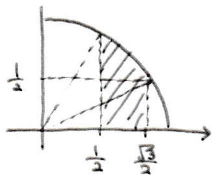


求める面積Sは左図の斜線部である。

(1)より
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$
∴ $y\,dx = -\sqrt{1-y^2}\,dy$.

$$S = \int_a^b y\,dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-y^2}\,dy$$

=



$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\pi}{12}$$ //

133 3 次関数 $f(x) = x(x^2 + px + q)$ は $x = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$ で極大値 0 をとり，$x = \beta$ で極小値 -32 を取るとする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha,\ \beta,\ p,\ q$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を x 軸の正の方向へ c $(c > 0)$ だけ平行移動した関数を $g(x)$ とするとき，2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積を c で表せ。

(1991-3)

(1) $f(x)$ は $x=\alpha$ $(\neq 0)$ で極大値 0 をとるので，

$$f(x) = x(x-\alpha)^2$$

と書ける．

$$f'(x) = (x-\alpha)^2 + x \cdot 2 \cdot (x-\alpha)$$
$$= (x-\alpha)(3x-\alpha).$$

∴ $x=\alpha,\ \frac{\alpha}{3}$ で $f(x)$ は極値をとる．

$x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値より

$$\beta = \frac{\alpha}{3}.$$

よって，$f(\beta) = -32$ より．

$$\frac{\alpha}{3}\cdot\left(\frac{\alpha}{3}-\alpha\right)^2 = -32$$
$$4\alpha^3 = -32\cdot 3^3$$
$$\alpha^3 = (-6)^3$$
$$\begin{cases}\alpha = -6. \\ \beta = -2\end{cases}$$ //

∴ $f(x) = x(x+6)^2$
$= x(x^2+12x+36)$

と書けるので，

$p = 12,\ q = 36$ //

(2) (1)より，$f(x) = x(x+6)^2$．

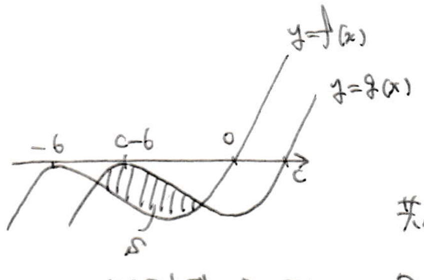
また，条件より $g(x) = (x-c)(x+6-c)^2$

$f(x) = g(x)$ とおく．

$$x(x+6)^2 = (x-c)(x-c+6)^2$$

まとめると，

$$3x^2 - 3(c-8)x + (c-6)^2 = 0 \quad \cdots ①$$



条件から，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は共有点を2つもつ必要があるので，

①の判別式をDとおくと．$D > 0$

$$D = 9(c-8)^2 - 12(c-6)^2 > 0.$$
$$c^2 - 48 < 0.$$

$c > 0$ より．

$$0 < c < 4\sqrt{3}$$

よって，このときの異なる2つの共有点を $\gamma,\ \delta$ とおく．

$$S = \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x))\,dx$$
$$= -3c\int_\gamma^\delta (x-\gamma)(x-\delta)\,dx$$
$$= 3c\,\frac{(\delta-\gamma)^3}{6}$$
$$= \frac{1}{2}c\cdot(\delta-\gamma)^3.$$

ここで，

$$\gamma+\delta = \frac{3(c-8)}{3} = c-8.$$
$$\gamma\delta = \frac{1}{3}\cdot(c-6)^2$$

∴ $(\delta-\gamma)^2 = (\delta+\gamma)^2 - 4\gamma\delta$
$= (c-8)^2 - \frac{4}{3}(c-6)^2 = \frac{1}{3}(48-c^2)$

よって．

$$S = \frac{1}{2}c\cdot\left\{\frac{1}{3}(48-c^2)\right\}^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}c\cdot(48-c^2)^{\frac{3}{2}} \quad (0 < c < 4\sqrt{3})$$ //

$\boxed{134}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の第一象限内の点 P においてこの楕円に引いた接線が点 $(4, 0)$ を通るとする。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) O を原点，A を楕円の頂点 $(2, 0)$ とする。第一象限において，線分 OA, OP および楕円の弧 $\overset{\frown}{AP}$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1990-4)

(1) 楕円上の点を $(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$x = 2\cos\theta$, $y=\sin\theta$ より

$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta$. $\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta$.

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}$.

接線の方程式は．

$$y-\sin\theta = -\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(x-2\cos\theta)$$

$(4, 0)$ を通るので．

$$-\sin\theta = -\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(4-2\cos\theta)$$

$$\sin^2\theta = \cos\theta(2-\cos\theta)$$

$$1-\cos^2\theta = 2\cos\theta - \cos^2\theta$$

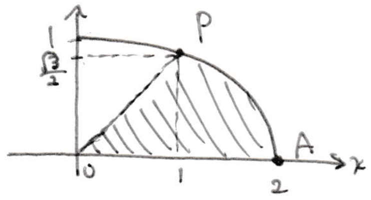
$$\cos\theta = \frac{1}{2}.$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より． $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

$\therefore$ 点 P の座標は． $\left(2\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

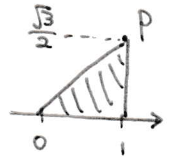
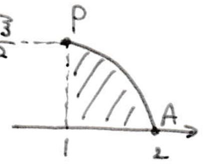
i.e. $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ //

(2)



求める面積 S は

左図の斜線部である．

$S =$  $+$ 

$= S_1 + S_2$ とおく．

$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 \quad = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

S_2 について．

$$S_2 = \int_1^2 y\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sin\theta\cdot(-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\,d\theta.$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$= \frac{\pi}{3}$$ //

135 (1) $a>0,\ b>0$ のとき，2曲線 $y=\cos^2\dfrac{x}{a}$ と $y=\sin^2\dfrac{x}{b}$ の交点の x 座標で最小な正の値を求めよ。

(2) $a>0$ として，4曲線

$C_1: y=\cos^2\dfrac{x}{a},\quad C_2: y=\sin^2\dfrac{x}{a},$

$C_3: y=\cos^2\dfrac{x}{a+1},\quad C_4: y=\sin^2\dfrac{x}{a+1}$

を考える。p を C_1 と C_2 の交点の x 座標で最小な正の値とし，q を C_3 と C_4 の交点の x 座標で最小な正の値とするとき，$p \leqq x \leqq q$ の範囲でこの4曲線によって囲まれる図形の面積を求めよ。

(1989-3)

(1).

$$y=\cos^2\frac{x}{a}=\frac{1+\cos 2\frac{x}{a}}{2}$$

$$y=\sin^2\frac{x}{b}=\frac{1-\cos 2\frac{x}{b}}{2}$$

共有点の x 座標は.

$$\frac{1+\cos 2\frac{x}{a}}{2}=\frac{1-\cos 2\frac{x}{b}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2\frac{x}{a}=-\cos 2\frac{x}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2\frac{x}{a}+\cos 2\frac{x}{b}=0.$$

$$\therefore\ 2\cos\left(\frac{x}{a}+\frac{x}{b}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{a}-\frac{x}{b}\right)=0.$$

これをみたすには.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{\pi}{2}+2m\pi$$

or

$$\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=\frac{\pi}{2}-2n\pi.$$

つまり.

$$\frac{a+b}{ab}x=\frac{\pi}{2}+2m\pi.$$

or

$$\frac{b-a}{ab}x=\frac{\pi}{2}+2n\pi.$$

$m=0$ で

$$x=\frac{ab}{2(a+b)}\pi \quad \text{が最小.}$$

//

$$C_2: y=\sin^2\frac{x}{a}=\frac{1-\cos\frac{2x}{a}}{2}$$

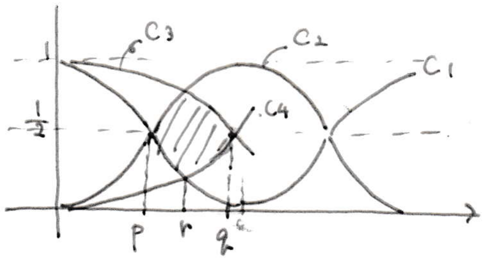
$$C_3: y=\cos^2\frac{x}{a+1}=\frac{\cos\frac{2x}{a+1}+1}{2}.$$

(2)

(1)より.

$$p=\frac{a\cdot a}{2(a+a)}\pi=\frac{a}{4}\pi.$$

$$q=\frac{(a+1)(a+1)}{2((a+1)+(a+1))}\pi=\frac{a+1}{4}\pi.$$



C_1 と C_4 の共有点の x 座標で最小なものを r とおく.

$$r=\frac{a\cdot(a+1)}{2((a+1)+a)}\pi=\frac{a(a+1)}{2(2a+1)}\pi.$$

$y=\frac{1}{2}$ での対称性より.

$\frac{1}{2}S=$  $+$ 

$$=\int_p^r\left\{\frac{1-\cos\frac{2x}{a}}{2}-\frac{1}{2}\right\}dx+\int_r^q\left\{\frac{\cos\frac{2x}{a+1}+1}{2}-\frac{1}{2}\right\}dx$$

$$=\int_p^r\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2x}{a}\right)dx+\int_r^q\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2x}{a+1}\right)dx.$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sin\frac{2x}{a}\right]_p^r+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\sin\frac{2x}{a+1}\right]_r^q$$

$$=-\frac{a}{4}\sin\frac{a+1}{2a+1}\pi+\frac{a}{4}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{a+1}{4}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{a+1}{4}\sin\frac{a}{2a+1}\pi$$

$$=\frac{2a+1}{4}-\frac{a}{4}\sin\frac{a+1}{2a+1}\pi-\frac{a+1}{4}\sin\frac{a}{2a+1}\pi$$

$$\therefore\ S=\frac{2a+1}{2}-\frac{a}{2}\sin\frac{a+1}{2a+1}\pi-\frac{a+1}{2}\sin\frac{a}{2a+1}\pi$$

//