数学問題 解答

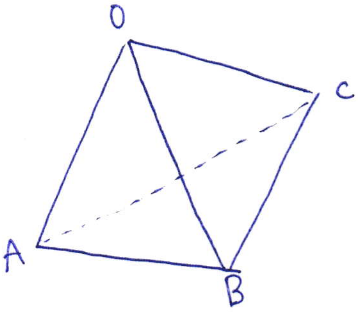
Takenaga Koudai

2021 年 8 月 17 日

1 四面体 OABC において，以下の 2 つの条件は同値であることを示せ．

(1) $OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2 = OC^2 + AB^2$

(2) $OA \perp BC$, $OB \perp AC$, $OC \perp AB$



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.
$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$
$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$　　とおく．

まず，

$$OA^2 + BC^2 = |\vec{a}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

同様に，

$$OB^2 + AC^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$OC^2 + BA^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{a}$$

さて，

(1) ⇒ (2) を示す．

$OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2$

より，$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}$　　（∵ 上の式）．

であり，
$$\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c} = 0.$$
$$(\vec{b} - \vec{a})\cdot\vec{c} = 0.$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0.$$
$$\therefore AB \perp OC.$$

他も同様．

(2) ⇒ (1) を示す．

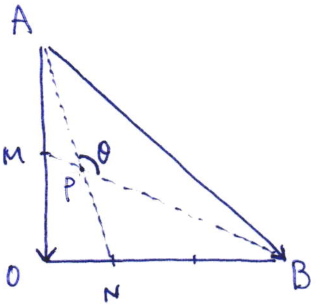
$OA \perp BC$ より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0.$$
$$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{c} - \vec{b}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$
$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}.$$

よって，はじめに行った式変形を見れば

$OB^2 + AC^2 = OC^2 + BA^2$.　　他も同様　■

2 $\triangle$OAB を，OA=OB の直角二等辺三角形とする．OA の中点を M，OB の 3 等分点のうち O に近いほうの点を N とし，AN と BM との交点を P とする．$\angle$APB$=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値はいくらか．



OA=OB=1.

$\vec{AO}=\vec{a}$.
$\vec{AB}=\vec{b}$ とおく.

条件より. $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$.

$\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}$.

$\vec{AN}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

$\vec{AP}=k\vec{AN}$ とおく. (k:実数).

$\vec{AP}=k\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

$=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}$.

$=\frac{4}{3}k\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}$ $\left(=\frac{4}{3}k\vec{AM}+\frac{1}{3}k\vec{AB}\right)$

PはBM上より.

$\frac{4}{3}k+\frac{1}{3}k=1$.

$k=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \vec{AP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$ --- ①

また.

$\vec{BA}=-\vec{b}$, $\vec{BO}=\vec{AO}-\vec{AB}$

$=\vec{a}-\vec{b}$.

$\vec{BN}=\frac{2}{3}\vec{BO}$

$=\frac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})$.

さて.

$\vec{BM}=\vec{BO}+\vec{OM}$

$=(\vec{a}-\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{a}$

$=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$.

$\vec{BP}=l\vec{BM}$ とおく. (l:実数).

$\vec{BP}=l\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{2}l\vec{a}-l\vec{b}$

$=\frac{3}{4}l\cdot\frac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})-\frac{1}{2}l\vec{b}$

$\left(=\frac{3}{4}l\vec{BN}+\frac{1}{2}l\vec{BA}\right)$

PはAN上より.

$\frac{3}{4}l+\frac{1}{2}l=1$.

$l=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \vec{BP}=\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{4}{5}\vec{b}$. --- ②

①,②より

$|\vec{AP}|^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\cdot2\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

$=\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(4+2+4\right)$

$=\frac{2}{5}$

$|\vec{BP}|^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-2\cdot2\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

$=\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1+8-4\right)$

$=\frac{4}{5}$

$\vec{AP}\cdot\vec{BP}=\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(4|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

$=\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(4-8-6\right)$

$=-\frac{2}{5}$

よって.

$\vec{AP}\cdot\vec{BP}=|\vec{AP}|\cdot|\vec{BP}|\cdot\cos\theta$ より

$-\frac{2}{5}=\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\cos\theta$

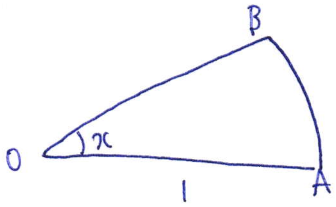
$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \theta=135^\circ$ //

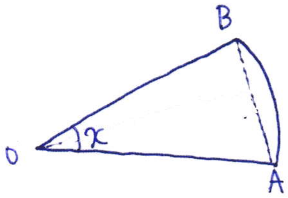
$\boxed{3}$ $\lim_{x \to \cancel{\infty}\, 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ を示せ.

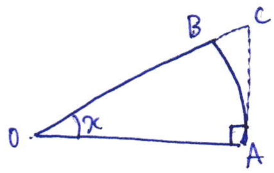
〈証明〉.

中心角が x（弧度法）のおうぎ形を考える.



半径を1とすれば弧の長さは x である.





上図より. 以下が成立.

$\triangle OAB <$ 扇 $OAB < \triangle OAC$.

つまり.

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

が成立する.

辺々 $\sin x$ でわって.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \cos x$$

逆数をとって.

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

ここで,

$$\lim_{x \to +0} \cos x = 1. \quad \text{なので}$$

はさみうちの原理から.

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

また. $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{(-x)}$ より.

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

よって.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

∎

4 $x^5=1$, $x \neq 1$ のとき，次の (1)，(2) の値をそれぞれ求めよ．

(1) $x+\dfrac{1}{x}$

(2) $2x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2}{x^3+1}+\dfrac{x^3}{x^4+1}$

(1).

$x^5=1$

$\Leftrightarrow \quad x^5-1=0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$.

$x \neq 1$ より

$x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

また，$x \neq 0$ なので，両辺を x^2 でわって．

$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$.

$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0$.

$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$.

$\therefore \quad x+\frac{1}{x}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ //

(2) まず，

$$\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{x^2}{x^3+x^5} \quad (\because x^5=1)$$

$$=\frac{1}{x+x^3}$$

$$=\frac{1}{x(x^2+1)}$$

$$\frac{x^3}{x^4+1}=\frac{x^3}{x^4+x^5} \quad (\because x^5=1)$$

$$=\frac{1}{x+x^2}$$

$$=\frac{1}{x(1+x)}$$

よって，

$$(与式)=2x+\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x(x^2+1)}+\frac{1}{x(x+1)}$$

$$=2x+\frac{1+x}{x(1+x)}+\frac{x^2+1}{x(x^2+1)}$$

$$=2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$$

$$=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

(1)より $x+\frac{1}{x}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ なので

$(与式)=-1\pm\sqrt{5}$ //

5 O, S, K のカードが 1 枚ずつ, A のカードが 2 枚の計 5 枚のカードがある. 以下の問に答えよ.

(1) 5 枚のカードを一列に並べてできる 5 文字の列は全部で何通りあるか.

(2) 5 枚のカードを箱の中にいれる. この箱から 1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し, 取り出した順に左から一列に並べて 3 文字の列を作る試行を 100 回繰り返すことを考える. O, A, K の順に並ぶ事象が 100 回のうち r 回起こる確率を $\mathrm{P}(r)$ とするとき, $\mathrm{P}(r)$ が最大となるときの r の値を求めよ. ただし, それぞれの試行において, どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする.

(1)

O, S, K は1枚ずつ, Aが2枚なので,
並べ方は, $_5C_2 \cdot 3! = \underline{60\text{通り}}$. //

(2).

1回の事象において, O, A, K の順に並ぶ確率は,

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{30}.$$

この事象が 100回のうち r回起こる確率を P(r)とする.

$$P(r) = {}_{100}C_r \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^r \cdot \left(1 - \frac{1}{30}\right)^{100-r}$$

$$= \frac{100!}{r! \cdot (100-r)!} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^r \cdot \left(\frac{29}{30}\right)^{100-r}$$

さて,

$$P(r+1) = \frac{100!}{(r+1)!\,(100-(r+1))!} \left(\frac{1}{30}\right)^{r+1} \cdot \left(\frac{29}{30}\right)^{100-(r+1)}$$

であるので,

$$\frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{\dfrac{100!}{(r+1)!\,(99-r)!} \cdot \left(\dfrac{1}{30}\right)^{r+1} \cdot \left(\dfrac{29}{30}\right)^{99-r}}{\dfrac{100!}{r! \cdot (100-r)!} \cdot \left(\dfrac{1}{30}\right)^{r} \cdot \left(\dfrac{29}{30}\right)^{100-r}}$$

$$= \frac{100-r}{r+1} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{30}{29}$$

$$= \frac{1}{29} \cdot \frac{100-r}{r+1}$$

ここで, $\dfrac{P(r+1)}{P(r)} > 1$ となるのは,

$$\frac{1}{29} \cdot \frac{100-r}{r+1} > 1$$

$$71 > 30r$$

$$2.\cdots > r$$

$\therefore\ P(0) < P(1) < P(2) < P(3) > P(4) > \cdots$

よって, P(r)が最大となるのは $r = 3$ のとき. //

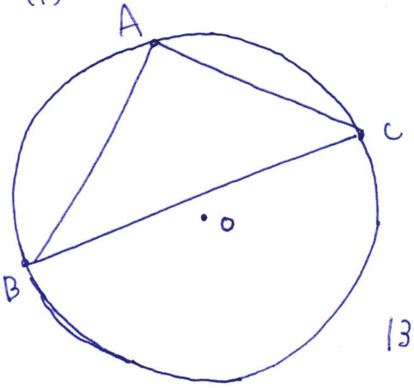
6 △ABC は中心 O, 半径 $\sqrt{3}$ の円に内接している．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと, 関係式 $13\vec{a}+12\vec{b}+5\vec{c} = \vec{0}$ が成り立つ．このとき，次の (1)〜(3) の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は直交することを示せ．

(2) △ABC の面積を求めよ．

(3) △ABC の頂点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いてあらわせ．

(1)



円の半径が$\sqrt{3}$より

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{3}$.

$13\vec{a} + 12\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ より．

$\vec{a}\cdot(13\vec{a} + 12\vec{b} + 5\vec{c}) = 0$

$\Leftrightarrow 13|\vec{a}|^2 + 12\,\vec{a}\cdot\vec{b} + 5\,\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

$\Leftrightarrow 39 + 12\,\vec{a}\cdot\vec{b} + 5\,\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$. ⋯ ①

$\vec{b}\cdot(13\vec{a} + 12\vec{b} + 5\vec{c}) = 0$.

$\Leftrightarrow 13\,\vec{b}\cdot\vec{a} + 12|\vec{b}|^2 + 5\,\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

$\Leftrightarrow 13\,\vec{b}\cdot\vec{a} + 36 + 5\,\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ ⋯ ②

$\vec{c}\cdot(13\vec{a} + 12\vec{b} + 5\vec{c}) = 0$

$\Leftrightarrow 13\,\vec{c}\cdot\vec{a} + 12\,\vec{c}\cdot\vec{b} + 5|\vec{c}|^2 = 0$

$\Leftrightarrow 13\,\vec{c}\cdot\vec{a} + 12\,\vec{c}\cdot\vec{b} + 15 = 0$ ⋯ ③

②より

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{13}(36 + 5\,\vec{b}\cdot\vec{c})$

③より

$\vec{a}\cdot\vec{c} = -\frac{1}{13}(15 + 12\,\vec{b}\cdot\vec{c})$

①に代入．

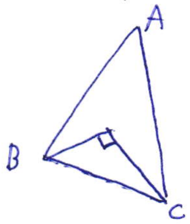
$39\cdot 13 - 12(36 + 5\,\vec{b}\cdot\vec{c}) - 5(15 + 12\,\vec{b}\cdot\vec{c}) = 0$.

$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

よって $\vec{b}$と$\vec{c}$は直交する． 終

(2)

(1)より $\vec{b}\perp\vec{c}$.



$\therefore\ \angle BAC = 45°$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= 6 - 2\cdot\left(-\frac{36}{13}\right)$

$= \frac{150}{13}$

$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{c}$

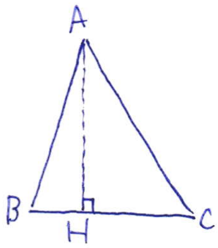
$= 6 - 2\left(-\frac{15}{13}\right)$

$= \frac{108}{13}$

$\therefore\ S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin 45°$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{150}{13}}\cdot\sqrt{\frac{108}{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{45}{13}$ //

(3)



実数kを用いて，

$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$ とおく．

$\overrightarrow{AH} = k(\vec{b} - \vec{a}) + (1-k)(\vec{c} - \vec{a})$

$= k\vec{b} + (1-k)\vec{c} - \vec{a}$.

ここで，AH⊥BCより $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

$(k\vec{b} + (1-k)\vec{c} - \vec{a})\cdot(\vec{c} - \vec{b}) = 0$.

$\Leftrightarrow k\,\vec{b}\cdot\vec{c} + (1-k)|\vec{c}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{c}$
$\quad - k|\vec{b}|^2 - (1-k)\,\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

(1)の結果を用いて．

$(1-k)\cdot 3 + \frac{15}{13} - 3k - \frac{36}{13} = 0$

$k = \frac{3}{13}$.

$\therefore\ \overrightarrow{AH} = -\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b} + \frac{10}{13}\vec{c}$. //

7 xy 平面上に，次の媒介変数で与えられる曲線 C がある．

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(2) 曲線 C において，$y \geq a$ の部分の弧の長さを $\mathrm{L}(a)$ とするとき，$\mathrm{L}(a)$ を a を用いて表せ．ただし，$0 \leq a < 2$ とする．

(1)

$x = \theta - \sin\theta$ より

$\dfrac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta \geq 0$.

$\theta = 0, 2\pi$ で $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$.

$y = 1 - \cos\theta$ より

$\dfrac{dy}{d\theta} = \sin\theta$

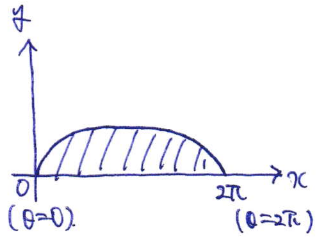
$\theta = 0, \pi, 2\pi$ で $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$.

また，

$\theta = 0$ のとき $x = 0$, $y = 0$.

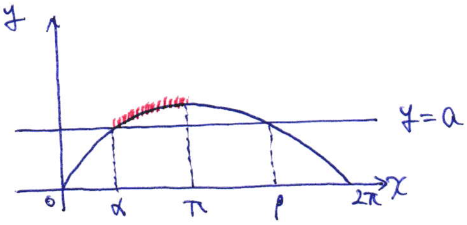
$\theta = 2\pi$ のとき $x = 2\pi$, $y = 0$.

ゆえにグラフは下図で求める面積は斜線部．



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta \\ &= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

(2)



曲線 C と $y=a$ の共有点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とおく．
グラフの対称性より，求める曲線の長さは，$\alpha \leq x \leq \pi$ の部分を2倍したものである．

$$\begin{aligned} L(a) &= 2\int_\alpha^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &= 2\int_\alpha^\pi \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\,d\theta \\ &= 2\int_\alpha^\pi \sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta \\ &= 2\sqrt{2}\int_\alpha^\pi \sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta \\ &= 2\sqrt{2}\int_\alpha^\pi \sqrt{1 - \left(-1 + 2\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)}\,d\theta \\ &= 4\int_\alpha^\pi \sqrt{1 - \cos^2\frac{1}{2}\theta}\,d\theta \\ &= 4\int_\alpha^\pi \sin\frac{1}{2}\theta\,d\theta \quad (\because\ 0<\theta<\pi \text{ で } \sin\theta \geq 0) \\ &= 4\left[-2\cos\frac{1}{2}\theta\right]_\alpha^\pi \\ &= 8\cos\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

ここで，

$a = 1 - \cos\alpha$.　　$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1$

$\cos\alpha = 1 - a$.　　$\cos^2\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{2-a}{2}$

$\therefore \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{2-a}{2}}$

よって $L(a) = 4\sqrt{2(2-a)}$

8 $-\dfrac{3}{2} < a_1 < 3,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $a_1 < a_2$ であることを示せ．また，$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して $0 < a_n < 3$ であることを示せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $0 < 3 - a_n \leqq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(3 - a_1)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(1) 〈証明〉.

・ $a_2 = \sqrt{2a_1+3}$ より．

$a_1 < a_2$ を示すには $a_1 < \sqrt{2a_1+3}$ を示せばよい．

(i) $-\frac{3}{2} < a_1 \leqq 0$ のとき

明らか．

(ii) $0 < a_1 < 3$ のとき．

$a_1^2 - (2a_1+3) = a_1^2 - 2a_1 - 3$

$= (a_1-3)(a_1+1)$

< 0.

$\therefore\ a_1^2 < 2a_1+3$.

$\therefore\ a_1 < \sqrt{2a_1+3}$

□

・帰納法で示す．

① $n=1$ のとき．

$-\frac{3}{2} < a_1 < 3$

$-3 < 2a_1 < 6$

$0 < 2a_1+3 < 9$

$0 < \sqrt{2a_1+3} < 3$

$\therefore\ 0 < a_2 < 3$.

② $n=k$ で仮定の成立を仮定する．

$0 < a_k < 3$.

$0 < 2a_k < 6$

$3 < 2a_k+3 < 9$

$\therefore\ 0 < \sqrt{2a_k+3} < 3$.

よって $0 < a_{k+1} < 3$ が成立．

□

(2) 〈証明〉.

(1)より $0 < a_n < 3$ より

$0 < 3 - a_n$.

$3 - a_n = 3 - \sqrt{2a_{n-1}+3}$

$= \dfrac{3^2 - (2a_{n-1}+3)}{3 + \sqrt{2a_{n-1}+3}}$

$= \dfrac{2(3 - a_{n-1})}{3 + \sqrt{2a_{n-1}+3}}$

ここで，$0 < a_n < 3$ より

$\sqrt{2a_{n-1}+3} > 0$.

$\therefore\ 3 - a_n < \frac{2}{3}(3 - a_{n-1})$

$< \left(\frac{2}{3}\right)^2(3 - a_{n-2})$

$\vdots$

$< \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(3 - a_1)$

□

(3)

まず，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3 - a_1) = $ (定数)

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot(3 - a_1) = 0$.

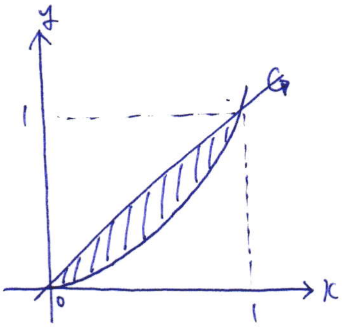
はさみうちの原理により

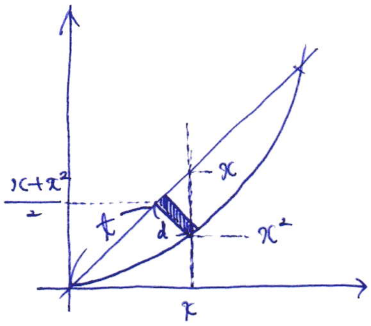
$3 - a_n \to 0 \quad (\text{as } n\to\infty)$

$\therefore\ a_n \to 3. \quad (\text{as } n\to\infty)$

//

9 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.





求める体積は 右図の斜線部 を $y=x$まわりに回転させたものである.

右図のように微小体積を考え、それの和をとる.

つまり. $V=\int_0^{\sqrt{2}} \pi \cdot d^2\,dt$

さて、右図から.

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-x^2) \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

$$t+d=\sqrt{2}x.$$

$$t+\frac{1}{\sqrt{2}}(x-x^2)=\sqrt{2}x.$$

$$\therefore\quad t=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$$

$$dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+2x)\,dx.$$

t	$0\to\sqrt{2}$
x	$0\to 1$

よって.

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi\cdot\frac{1}{2}(x-x^2)^2\,dt$$

$$=\int_0^1\pi\cdot\frac{1}{2}(x-x^2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+2x)\,dx.$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)(1+2x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(2x^5-3x^4+x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{2}{6}x^6-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{15}=\frac{\pi}{30\sqrt{2}}$$ //

10 点 A$(1,3,0)$ を通りベクトル $\vec{d}=(-1,1,-1)$ に平行な直線を l とする．また，直線 $x+1=\dfrac{3-y}{2}$，$z=2$ を m とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P，Q がそれぞれ直線 l，m 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値と，そのときの P，Q の座標を求めよ．

(2) 直線 l，m の両方に垂直な直線 n の方程式を，$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ の形で求めよ．

(1)

l は．点 A$(1,3,0)$ を通り．方向ベクトル $(-1,1,-1)$ より．その上の点 P は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 3+\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

と書ける．（λ は実数）

m は．$x+1=\dfrac{3-y}{2}$，$z=2$ より，その上の点 Q は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

と書ける．（t は実数）．

$$\therefore\ PQ^2 = |\vec{OP}-\vec{OQ}|^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda-t \\ 3+\lambda-(1-2t) \\ -\lambda-2 \end{pmatrix}^2$$

$$= (1-\lambda-t)^2 + (2+\lambda+2t)^2 + (\lambda+2)^2$$

計算して整理すると

$$PQ^2 = 3(\lambda+t+1)^2 + 2t^2 + 6$$

$(\lambda+t+1)^2 \geqq 0$．$t^2 \geqq 0$ より

PQ の長さが最小となるのは この2つが ともに0になるときである．

このときの λ と t の値は．

$\lambda=-1$．$t=0$．

PQ^2 の最小値は 6．

$\therefore$ PQ の最小値は $\sqrt{6}$ //

P の座標は．$\lambda=-1$ より

P$(2,2,1)$

Q の座標は $t=0$ より

Q$(0,1,2)$ //

(2)

直線 l 上の任意の点から直線 m への最短距離を取ると，この線分は m と直交する．また．l とも直交している．つまり．(2) で求める直線は．(1) で求めた P.Q を用いて．直線 PQ そのものである．

ここ．方向ベクトルは．

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

点 P$(2,2,1)$ を通るので 方程式は

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

$$-\frac{1}{2}x+1 = -y+2 = z-1$$

$$\frac{1}{2}x = y-1 = -z+2$$ //

11 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とし，$2 < e < 3$ を用いてもよい．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とする．(1) の結果より，$f^{(n)}(x)$ を類推し，それが正しいことを証明せよ．ただし，n は自然数とする．

(3) 任意の自然数 n に対して，$f^{(n)}(x) = 0$ を満たす x の値を x_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{n}$ を求めよ．

ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ を用いてもよい．

(1) $f(x) = xe^{-x}$

$$f'(x) = e^{-x} + x\cdot(-e^{-x})$$
$$= e^{-x}(1-x)$$
$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}\cdot(-1)$$
$$= -e^{-x}(2-x)$$
$$f'''(x) = e^{-x}(2-x) - e^{-x}(-1)$$
$$= e^{-x}(3-x)$$

//

(2) (1)より

$$f^{(1)}(x) = e^{-x}(1-x)$$
$$f^{(2)}(x) = (-1)\cdot e^{-x}(2-x)$$
$$f^{(3)}(x) = (-1)^2 e^{-x}(3-x) \quad \text{より}$$

$$f^{(n)}(x) = e^{-x}\cdot(-1)^{n-1}(n-x)$$

と類推できる．

これが正しいことを帰納法で示す．

i) $n=1$ は (1)で結果を見た．

ii) $n=k$ で成立を仮定．

i.e. $f^{(k)}(x) = e^{-x}(-1)^{k-1}(k-x)$

と仮定．

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k-1}\{-e^{-x}(k-x) + e^{-x}\cdot(-1)\}$$
$$= (-1)^{k-1}(-e^{-x}(k+1-x))$$
$$= (-1)^k e^{-x}(k+1-x)$$

□

(3)

i) (2)より $f^{(n)}(x) = e^{-x}(-1)^{n-1}(n-x)$.

$e^{-x}>0$, $(-1)^{n-1} \neq 0$ なので

$f^{(n)}(x)=0$ をみたす x は $x=n$.

$\therefore x_n = n$.

$$\therefore \frac{f(x_n)}{n} = \frac{f(n)}{n}$$
$$= \frac{n\cdot e^{-n}}{n} = e^{-n}.$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

//

ii) $$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \sum_{n=1}^{N} n\cdot e^{-n}$$
$$= \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{N}{e^N} = S_n$$

とする．

$$\frac{1}{e}S_n = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^3} + \cdots + \frac{N-1}{e^N} + \frac{N}{e^{N+1}}$$

$$S_n - \frac{1}{e}S_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^N} - \frac{N}{e^{N+1}}$$
$$= \frac{1}{e}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^N}{1-\frac{1}{e}} - \frac{N}{e^{N+1}}$$
$$= \frac{1}{e-1}\left(1-\frac{1}{e^N}\right) - \frac{N}{e^{N+1}}.$$

$$\therefore S_n = \frac{e}{(e-1)^2}\left(1-\frac{1}{e^N}\right) - \frac{1}{(e-1)}\cdot\frac{N}{e^N}$$

$n\to\infty$ で $\lim \frac{n}{e^n} = 0$ より

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$$

//

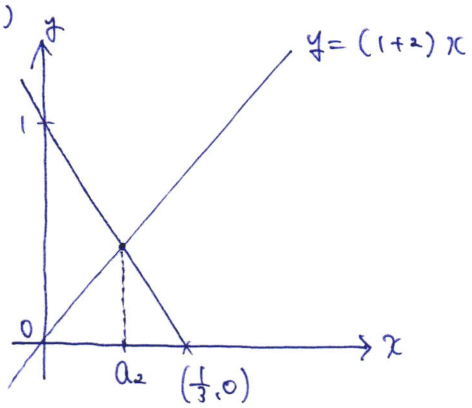
$\boxed{12}$ 2 点 $(0,1)$，$(a_n,0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を通る直線と，直線 $y=(n+2)x$ の交点の x 座標を a_{n+1} とする．$a_1=\dfrac{1}{3}$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_2 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表し，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)a_na_{n+1}$ を求めよ．

(1)



$a_1=\frac{1}{3}$ より．2点 $(0,1)$，$(a_1,0)$ を通る直線の方程式は．

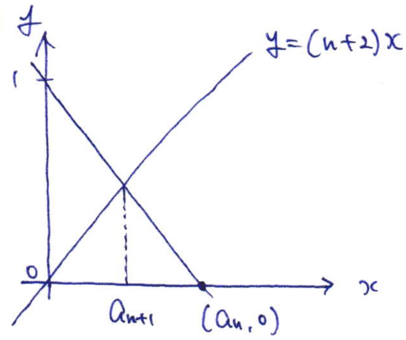
$$y=-3x+1.$$

これと $y=(1+2)x$ の共有点の x 座標は．

$$6x=1. \quad \therefore\ x=\frac{1}{6}$$

よって $a_2=\frac{1}{6}$ //

(2)



2点 $(0,1)$，$(a_n,0)$ を通る直線は，
傾き $-\frac{1}{a_n}$，切片 1 より．

$$y=-\frac{1}{a_n}x+1.$$

これと $y=(n+2)x$ の共有点の x 座標は．

$$-\frac{1}{a_n}x+1=(n+2)x.$$

を解けばよい．この x は a_{n+1} なので．

$$-\frac{1}{a_n}a_{n+1}+1=(n+2)a_{n+1}.$$

$$-a_{n+1}+a_n=(n+2)a_n\cdot a_{n+1}$$

$$a_n-(n+2)a_n\cdot a_{n+1}=a_{n+1}$$

$$a_n\{1-(n+2)a_{n+1}\}=a_{n+1}$$

$$a_n=\frac{a_{n+1}}{1-(n+2)a_{n+1}}$$

逆数をとる．

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}-(n+2)$$

ここで．$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと

$$b_n=b_{n+1}-(n+2)$$

$$b_{n+1}-b_n=n+2$$

$$\begin{array}{rl}
b_n-\cancel{b_{n-1}} &=(n-1)+2\\
\cancel{b_{n-1}}-\cancel{b_{n-2}} &=(n-2)+2\\
&\vdots\\
+)\ \cancel{b_2}-b_1 &=1+2\\
\hline
b_n-b_1 &=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}2\\
&=\frac{1}{2}(n-1)\cdot n+2(n-1)\\
&=\frac{1}{2}(n-1)(n+4)
\end{array}$$

また．$b_1=\frac{1}{a_1}=3$．

$$\therefore\ b_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+4)+3$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

よって $a_n=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ //

(3) まず，(2)より

$$a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \quad a_{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+3)}$$

$$\therefore (n+2)\, a_n a_{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

ここで，$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{2}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}\right)$

$$\therefore (n+2)\, a_n \cdot a_{n+1} = 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right).$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(n+2)\, a_n \cdot a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{2}{4}} + \cancel{\frac{1}{5}}\right)$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{2}{5}} + \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \cancel{\frac{2}{N+1}} + \frac{1}{N+2}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{N+1}} - \frac{2}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{N+2} - \frac{2}{N+2} + \frac{1}{N+3}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+2}.$$

$n \to \infty$ で，

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(n+2)\, a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\, a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{3}$$

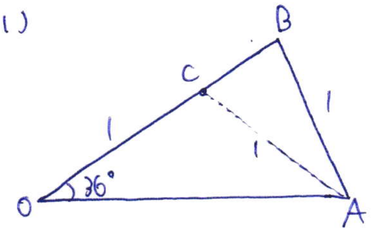
//

13 以下の問いに答えよ．

(1) $\angle AOB = 36°$，OA=OB，AB$= 1$ である二等辺三角形 OAB において，$\angle A$ の二等分線と OB の交点を C とする．このとき，BC の長さを求めよ．

(2) 正五角形 OABCD において，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(1)



$\triangle OAB$ が二等辺三角形なので

$\angle OAB = \angle OBA = 72°$.

AC は $\angle OAB$ の二等分線なので

$\angle OAC = 36°$.

$\therefore$ $\triangle OCA$ は二等辺三角形．OC$=1$．

また，AB$=$AC から．$\triangle ABC$ も二等辺三角形であり．
角度の関係から．

$\triangle ABC \sim \triangle OAB$.

BC$= x$ とおく．

$1 : (1+x) = x : 1$.

$x(x+1) = 1$

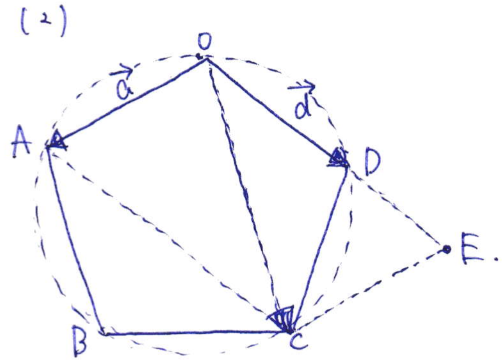
$x^2 + x - 1 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$x > 0$ より

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ //

(2)



上図のような平行四辺形 OACE を考える．

$\overrightarrow{EC} = \vec{a}$ であり．

(1) の結果から．

OD : DE $= 1 : \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{OE} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{d}$.

$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC}$

$= \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{d} + \vec{a}$ //

14 $\log_2 1$ から $\log_2 20$ の数が書かれた 20 枚のカードがある．
以下の問いに答えなさい．

(1) この 20 枚のカードの中から同時に 2 枚のカードを選ぶとき，2 枚のカードに書かれた数の和が整数となる確率を求めよ．

(2) この 20 枚のカードの中から同時に 2 枚のカードを選ぶとき，2 枚のカードに書かれた数の差が整数となる確率を求めよ．

(3) この 20 枚のカードの中から同時に 3 枚のカードを選ぶとき，選んだ 3 枚のどの 2 枚のカードに書かれた数の和も整数とならない確率を求めよ．

N	$\log_2 N$	N	$\log_2 N$
1	0	11	$\log_2 11$
2	1	12	$2+\log_2 3$
3	$\log_2 3$	13	$\log_2 13$
4	2	14	$1+\log_2 7$
5	$\log_2 5$	15	$\log_2 3+\log_2 5$
6	$1+\log_2 3$	16	4
7	$\log_2 7$	17	$\log_2 17$
8	3	18	$1+2\log_2 3$
9	$2\log_2 3$	19	$\log_2 19$
10	$1+\log_2 5$	20	$2+\log_2 5$

(1) 和が整数となるには，ともに整数である必要がある．上の表より 5通りである．

$$\therefore P = \frac{{}_5C_2}{{}_{20}C_2} = \frac{5\cdot 4}{20\cdot 19} = \frac{1}{19} \quad //$$

(2) 差が整数となるのは，以下の2パターン．

(i) ともに整数．

(1)より $P_1 = \frac{1}{19}$．

(ii) 整数でない部分が共通．

・$\log_2 3$が1つ：3枚 ${}_3C_2$

・$\log_2 3$が2つ：2枚 1

・$\log_2 5$が1つ：3枚 ${}_3C_2$

・$\log_2 7$が1つ：2枚 1．

選び方は 8通り．

$$\therefore P_2 = \frac{8}{{}_{20}C_2} = \frac{8}{10\cdot 19} = \frac{4}{5\cdot 19}$$

∴ 求める確率 P は $P = \frac{1}{19} + \frac{4}{5\cdot 19} = \frac{9}{95} \quad //$

(3) 対数が含まれるものを少なくとも2枚選択すればよい．

(i) 整数のみが0コ．15枚．

$$\frac{{}_{15}C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{20\cdot 19\cdot 18}.$$

(ii) 整数のみが1コ．

$$\frac{{}_{15}C_2\cdot {}_5C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{15\cdot 14\cdot 5}{20\cdot 19\cdot 18}\cdot 3$$

$$\therefore P = \frac{15\cdot 14\cdot 13 + 15\cdot 14\cdot 5\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18} = \frac{49}{57} \quad //$$

$\boxed{15}$ 媒介変数 θ を用いて,

$$\begin{cases} x = 2\cos^3\theta \\ y = 2\sin^3\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される曲線を C とする.

$\theta = t$ における曲線の接線を l とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，$0 < t < \frac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\frac{dy}{dx}$ を θ を用いて表せ．ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

(2) 直線 l の方程式を求めなさい.

(3) 曲線 C，直線 l，x 軸で囲まれる領域を S_1 とし，曲線 C，直線 l，y 軸で囲まれる領域を S_2 とする．S_1，S_2 を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とするとき，$V_1 + V_2$ の最小値を求めよ.

(1)

$x = 2\cos^3\theta$.

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta) = -6\sin\theta\cos^2\theta.$$

$y = 2\sin^3\theta$.

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cdot 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta = 6\sin^2\theta\cdot\cos\theta.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta. \quad //$$

(2) $\theta = t$ のとき，接線 l の傾きは (1) より $-\tan t$.

また，点 $(2\cos^3 t,\ 2\sin^3 t)$ を通るので，

$$y - 2\sin^3 t = -\tan t\cdot(x - 2\cos^3 t)$$

$$y = -\tan t\cdot(x - 2\cos^3 t) + 2\sin^3 t$$

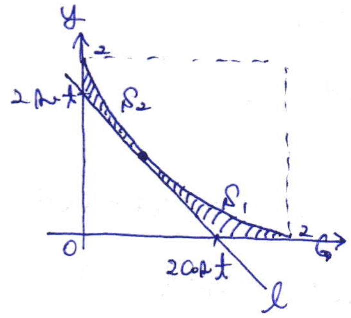
$$= -\tan t\cdot x + 2\sin t\cdot\cos^2 t + 2\sin^3 t$$

$$\therefore y = -(\tan t)x + 2\sin t. \quad //$$

(3)

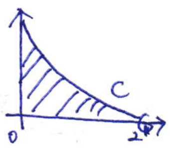
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta}(-\tan\theta)\left(-\frac{1}{6\sin\theta\cos^2\theta}\right) = \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{6\sin\theta\cdot\cos^2\theta} > 0 \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

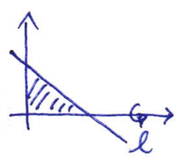
$\therefore$ 曲線Cは下に凸.



求める体積Vは左図の斜線部をx軸まわりに回転させたもの.

ここで，Vは以下のように求めることができる.

V = 

− 

$$= \pi\int_0^2 y^2\,dx - \frac{1}{3}\pi(2\sin t)^2\cdot 2\cos t.$$

$$= V_3 - V_4. \quad \text{とおく.}$$

$$V_4 = \frac{8}{3}\pi\cdot\sin^2 t\cos t.$$

$$V_3 = \pi\int_0^2 4\sin^6 t\, dx$$
$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4\sin^6 t\cdot(-6\sin t\cos^2 t)\,dt$$
$$= 24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^3\cdot\cos^2 t\cdot(\sin t)\,dt$$
$$= 24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 t - 3\cos^4 t + 3\cos^2 t - 1)\cos^2 t\,(\cos t)'\,dt.$$
$$= 24\pi\left[\frac{1}{9}\cos^9 t - \frac{3}{7}\cos^7 t + \frac{3}{5}\cos^5 t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{16\cdot 24\pi}{5\cdot 7\cdot 9}$$

よって、V_4は常にV_3の内側に存在するので、
Vの最小値を求めるにはV_4の最大値を求めればよい。

$$V_4 = \frac{8}{3}\pi\sin^2 t\cos t$$
$$= \frac{8}{3}\pi(1-\cos^2 t)\cos t$$

$$V_4' = \frac{8}{3}\pi(-\sin t + 3\cos^2 t\cdot\sin t)$$
$$= \frac{8}{3}\pi\sin t(3\cos^2 t - 1)$$

$\cos t = \frac{1}{\sqrt{3}}$で$V_4' = 0$
$(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$\cos t = \frac{1}{\sqrt{3}}$で$V_4$は最大値をとる。

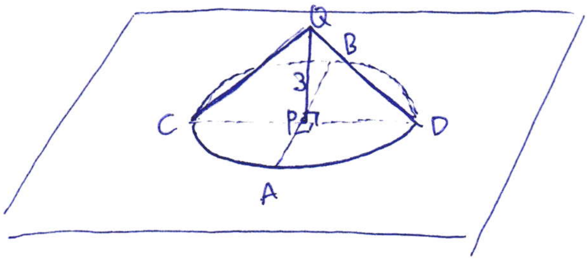
値は$\frac{8}{3}\pi(1-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{16}{27}\sqrt{3}\pi$.

∴ Vの最小値は、

$$\frac{16\cdot 24}{5\cdot 7\cdot 9}\pi - \frac{16}{27}\sqrt{3}\pi$$

$$= \frac{128}{105}\pi - \frac{16}{27}\sqrt{3}\pi$$
//

16 平面上に直径 8 の円がある．直径 AB 上の任意の点において，AB に垂直な弦 CD をとり，QC=QD，PQ= 3 である △QCD を，円に垂直な平面上に作る．P を A から B まで動かすとき，△QCD が通過してできる立体の体積 V を求めよ．



できた立体を，AB に垂直な面で切断すると，
底辺は CD，高さ 3 の三角形になる．
V はこれを集めたもの．

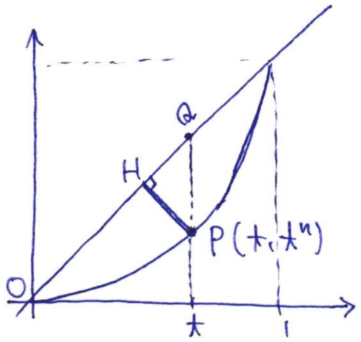
$$\therefore V = 4^2\pi \times 3 \times \frac{1}{2}$$
$$= 24\pi$$
//

17 2つの曲線 $y=x$ と $y=x^n$ (nは2以上の整数) について，以下の問いに答えよ．

(1) 2つの曲線に囲まれた部分を $y=x$ 周りに回転させてできる立体の体積を V_n とする．V_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

(1)



$0 \leqq t \leqq 1$ について．

$x=t$ のときの $y=x^n$ 上の点を $P(t, t^n)$，

$y=x$ 上の点を $Q(t, t)$ とおく．

点Pから直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点をHとおく．

点と直線の距離の公式から．

$$PH = \frac{|t-t^n|}{\sqrt{2}}$$

$0<t<1$ より　$t>t^n$

$$\therefore\ PH = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-t^n)$$

$OQ = \sqrt{2}t$.

$PH=HQ$ より

$$OH = \sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}}(t-t^n)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(t+t^n).$$

よって，$OH=s$ とおく．

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2}(t+t^n).$$

$$ds = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+nt^{n-1})$$

t	$0 \to 1$
s	$0 \to \sqrt{2}$

以上より．

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi \cdot PH^2\, ds$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \pi \cdot \frac{1}{2}(t-t^n)^2\, ds$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cdot (t-t^n)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+nt^{n-1})\, dt$$

ここで，

$$\cdot\ (t-t^n)^2(1+nt^{n-1})$$

$$= (t^2 - 2t\cdot t^n + t^{2n})\cdot(1+nt^{n-1})$$

$$= (t^2 - 2t^{n+1} + t^{2n} + nt^{n+1} - 2nt^{2n} + nt^{3n-1})$$

$$= n\cdot t^{3n-1} + (1-2n)t^{2n} + (n-2)t^{n+1} + t^2$$

$$\therefore\ V = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left[\frac{n}{3n}t^{3n} + \frac{1-2n}{2n+1}t^{2n+1} + \frac{n-2}{n+2}t^{n+2} + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{1-2n}{2n+1} + \frac{n-2}{n+2} + \frac{1}{3}\right)$$

//

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = -1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n+2} = 1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$$

//

$a^{p-1}-1$

$\boxed{18}$ pを素数とし，自然数aはpと互いに素であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a\ ,2a\ ,3a\ ,\cdots,(p-1)a$ を p で割った余りはそれぞれ異なることを示せ．

(2) $\cancel{a^{p-1}}$ はpの倍数であることを示せ．

(3) 2018^{1800} を 181 で割ったあまりを求めよ．

(1) 背理法で示す．

$1 \le q, r \le (p-1)$ とする．$(q>r)$．

$qa \equiv ra$ と仮定 $(\mathrm{mod}\, p)$．

つまり．

$qa = Qp + n$．

$ra = Rp + n$ と書ける．

$(q-r)a = (Q-R)p$．

a, pは互いに素なので

$q - r = kp \quad (k>0)$．

$q = kp + r$．

これは $1 \le q \le (p-1)$ に矛盾．

$\therefore$ $a, 2a, \cdots, (p-1)a$ を pで割った余りは

それぞれ異なる．

$\blacksquare$

(2)

$na \equiv h_n \quad (\mathrm{mod}\, p) \quad (1 \le n \le p-1)$

$(1 \le h_n \le p-1)$

とおく．

(1)より．$a, 2a, \cdots, (p-1)a$ を pで

割った余りはすべて異なるので．

$h_1, \cdots, h_{p-1}$ は全て異なる．

また，これらは $1, 2, \cdots, p-1$ と一対一に対応する．

$\therefore$ $a \cdot 2a \cdots\cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1)$

$(\mathrm{mod}\, p)$．

$a^{p-1}(1 \cdot 2 \cdots\cdots (p-1)) \equiv 1 \cdot 2 \cdots\cdots (p-1)$

$(\mathrm{mod}\, p)$

よって $(a^{p-1}-1)(1 \cdots\cdots (p-1)) \equiv 0$

$(\mathrm{mod}\, p)$

pが素数であることから．

$a^{p-1} - 1 \equiv 0$

$(\mathrm{mod}\, p)$

$\blacksquare$

(3) 181 は素数であり．2018と互いに素．

$\therefore$ (2)より $2018^{181-1} - 1 \equiv 0$．

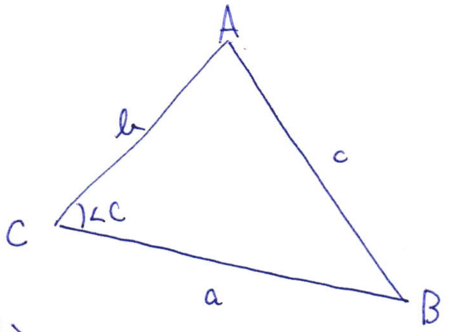
つまり $2018^{180} - 1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, 181)$

よって $2018^{180} \equiv 1$．

$\therefore$ $2018^{180 \cdot 10} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\, 181)$

//

19 3 辺の長さが a , b , c である三角形の面積 S が $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ を用いて，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と表されることを示せ．



〈証明〉.

三角形の面積を S とおくと

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\angle C$$

と表せる.

ここで,

$$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

より.

$$\sin^2\angle C=1-\cos^2\angle C$$

$$=(1-\cos\angle C)(1+\cos\angle C)$$

$$=\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$=\frac{c^2-(a^2-2ab+b^2)}{2ab}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}\cdot\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}$$

故に.

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2\cdot b^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

■